

Vorlesungsskriptum

Theoretische Physik I Klassische Mechanik

Dozent Prof. Dr. Ulrich Schwarz

WS 2010/11

Stand 18. April 2011



Institut für Theoretische Physik
Universität Heidelberg

Vorwort

Dieses Skript wurde für die Anfängervorlesung *Theoretische Physik I - Klassische Mechanik* im Wintersemester 2010/11 erstellt. Der Heidelberger Studienplan für Bachelor-Studenten der Physik sieht vor, dass die Theoretische Physik schon im ersten Semester beginnt. Obwohl die meisten Studenten vor Semesterbeginn in einem Vorkurs ihre schulischen Mathematikkenntnisse auffrischen, können die für die Vorlesung nötigen mathematischen Vorkenntnisse nicht vorausgesetzt werden und wurden deshalb als mathematische Einschübe in die Vorlesung aufgenommen. Es gibt viele sehr gute Bücher zum Thema Klassische Mechanik, aber nur wenige, die für diese Besonderheit des Studienplans geeignet sind. Der erste Band der Springer-Serie *Grundkurs Theoretische Physik* von Wolfgang Nolting zum Thema *Klassische Mechanik* kommt diesem Schema sehr nahe und wurde deshalb ausdrücklich empfohlen. Die hier wiedergegebene Vorlesung lehnt sich in Stoffauswahl und Notation eng an dieses Buch an, setzt aber andere Schwerpunkte und ergänzt den Stoff in einigen Bereichen. Um den Studierenden bei der Nachbearbeitung der Vorlesung und der Vorbereitung der Klausur zu helfen, wurde deshalb dieses Skript erstellt.

An dieser Stelle möchte ich allen danken, die zur Entstehung des Skripts beigetragen haben. Ein herzliches Dankeschön geht an Mirko Link, der als studentische Hilfskraft manches Wochenende eingesetzt hat, um die Grundversion in Latex und die vielen Abbildungen zu erstellen. Vielen Dank auch an die Studiengebührenkommission für die finanzielle Unterstützung. Und schliesslich vielen Dank an alle Studierende, die über die ELearning-Plattform zur Vorlesung auf Fehler aufmerksam gemacht haben.

Wer mehr Literatur zur Klassischen Mechanik sucht, kann neben dem erwähnten Buch von Wolfgang Nolting auch zu den Büchern von Torsten Fließbach, Walter Greiner, Florian Scheck oder Friedhelm Kuypers greifen. Die Klassiker (Goldstein, Landau-Lifshitz, Feynman) sind für den Anfang eines Bachelor-Studiums wohl eher nicht zu empfehlen. Erwähnenswert finde ich aber noch die *Einführung in die Theoretische Physik* von Josef Honerkamp and Hartmann Römer, die auch sehr starken Wert auf die Einführung der mathematischen Methoden legt. Wer speziell die mathematischen Grundlagen für das erste Semester aufarbeiten möchte, hat mittlerweile eine schöne Auswahl, z.B. *Mathematik für Physiker* von Klaus Weltner, *Mathematische Methoden in der Physik* von Christian Lang und Norbert Pucker oder *Rechenmethoden für Studierende der Physik im ersten Jahr* von Markus Otto.

Heidelberg, im April 2011

Ulrich Schwarz

Inhaltsverzeichnis

1	Kinematik des Massenpunktes	4
1.1	Massenpunkte und Ortsvektoren	4
1.2	Mathematischer Einschub 1: Vektoralgebra	6
	Vektorprodukt	11
1.3	Geschwindigkeit und Beschleunigung	18
1.4	Mathematischer Einschub 2: Vektoranalysis	22
1.5	Geschwindigkeit und Beschleunigung im mitbewegten System	32
1.6	Mathematischer Einschub 3: Koordinatensysteme	33
1.7	Geschwindigkeit und Beschleunigung in krummlinigen Koordinaten	55
2	Dynamik des Massenpunktes	58
2.1	Die Newtonsche Gesetze	58
2.2	Grundschema der Klassischen Mechanik	60
2.3	Mathematischer Einschub 4: Taylorentwicklung	63
2.4	Fallgesetze	67
	Freier Fall	67
	Fall mit Stoke'scher Reibung	68
	Fall mit Newton'scher Reibung	72
2.5	Mathematischer Einschub 5: Lineare ODEs	76
2.6	Mathematischer Einschub 6: Komplexe Zahlen	79
2.7	Der harmonische Oszillator	82
	Grundgleichung	82
	Gedämpfter harmonischer Oszillator	86
	Getriebener harmonischer Oszillator	90
	Fadenpendel	94
2.8	Energie und Drehimpuls	95
	Energie in 1D	95
	Energie in 3D	99
	Drehimpuls in 3D	104
2.9	Die drei Kepler'schen Gesetze	105
	2. Kepler'sches Gesetz (Flächensatz)	106
	1. Kepler'sches Gesetz (Ellipsensatz)	107
	3. Kepler'sches Gesetz	111

Inhaltsverzeichnis

2.10	Annahme von Punktteilchen	111
3	Mehrteilchensysteme	115
3.1	Motivation	115
3.2	Notation	117
3.3	Erhaltungssätze	119
3.4	Zwei-Teilchen-Systeme	125
3.5	Kepler-Problem	127
3.6	Zwei-Teilchen-Streuung	128
3.7	Gekoppelte Schwingungen	135

1 Kinematik des Massenpunktes

1.1 Massenpunkte und Ortsvektoren

Gegenstand der Mechanik ist die Beschreibung und Vorhersage der durch Kräfte erzeugten Bewegung von Masse-behafteten Körpern in Raum und Zeit (die zentralen Begriffe sind unterstrichen). Wie immer in der Physik ist das Ziel, mit möglichst wenigen Gesetzen eine möglichst allgemein gültige Beschreibung zu erzielen.

⇒ 3 Newton'sche Gesetze (*Philosophiae Naturalis Principia Mathematica 1687*)

Man unterscheidet zwei Untergebiete:

Kinematik: mathematische Beschreibung der Bewegung

Dynamik: Berechnung der Bewegung aus Kräften

Die Kinematik beschränkt sich auf *Massenpunkte*, deren Ausdehnung für die betrachtete Fragestellung keine Rolle spielt.

Beispiel Bewegung der Erde um die Sonne.

⇒ Ein Massenpunkt wird vollständig durch seinen *Ortsvektor* charakterisiert.

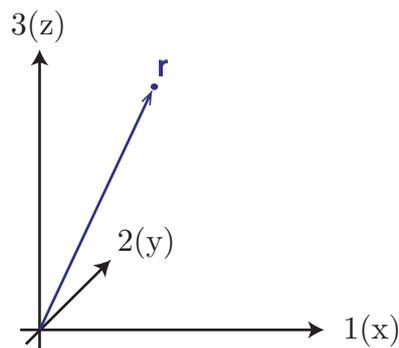


Abbildung 1.1: Ortsvektor eines Massenpunktes

1 Kinematik des Massenpunktes

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^3 x_i \mathbf{e}_i \quad \left[\begin{array}{l} \mathbf{r} \quad \text{Ortsvektor} \\ (x_1, x_2, x_3)^t \quad \text{Komponentenfunktion} \\ \mathbf{e}_i \quad \text{kartes. Einheitsvektoren} \end{array} \right]$$

mit $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Anmerkung Genauere Betrachtung der obigen Umformung:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^3 x_i \mathbf{e}_i$$

Statt $\sum_{i=1}^3 x_i \mathbf{e}_i$ wird auch oft $x_i \mathbf{e}_i$ geschrieben, d.h. das Summenzeichen wird weggelassen. Dies ist die *Einstein'sche Summenkonvention*: über doppelt vorkommende Indizes wird summiert (wird im Skript *nicht* verwendet).

Die Betrachtung eines Massenpunktes erfolgt immer in einem Bezugssystem (hier: *kartesisches Koordinatensystem*). Raum und Zeit haben in der Klassischen Mechanik keine eigenständige Bedeutung. Dies ändert sich allerdings in der Relativitätstheorie.

Wenn sich ein Massenpunkt bewegt, dann entsteht eine *Trajektorie* oder *Bahnkurve*.

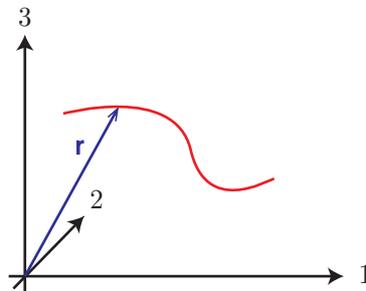


Abbildung 1.2: Trajektorie

Mathematisch:

Abbildung $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{t}) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^3 x_i(t) \mathbf{e}_i$$

1 Kinematik des Massenpunktes

Die Zeitabhängigkeit betrifft hier also nur die Komponentenfunktionen $x_i(t)$, die Einheitsvektoren \mathbf{e}_i sind hier zeitunabhängig.

Kinematik bedeutet Rechnung mit Vektoren

→ Vektoralgebra = algebraisches Rechnen mit Vektoren

Vektoranalysis = Infinitesimalrechnung mit Vektoren

1.2 Mathematischer Einschub 1: Vektoralgebra

Jeder Vektor (z.B. Ortsvektor) hat **Betrag** und **Richtung**. Physikalische Größen, die nur einen Betrag haben, heißen *Skalare* (z.B. Druck oder Temperatur).

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{Pythagoras}]{\text{Länge nach}} |\mathbf{a}| = a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

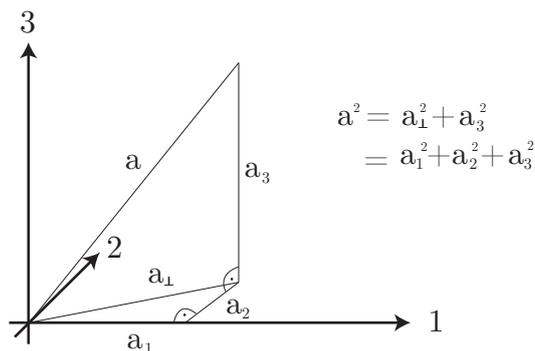


Abbildung 1.3: Länge eines Vektors nach Pythagoras

Statt mit (a_1, a_2, a_3) kann der Vektor auch mit (a, ϑ, φ) beschrieben werden, also mit dem Betrag und zwei Winkeln für die Richtung. Dabei wird ϑ als *Polarwinkel* und φ als *Azimutalwinkel* bezeichnet.

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a \sin \vartheta \cos \varphi \\ a \sin \vartheta \sin \varphi \\ a \cos \vartheta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad \text{Kugelkoordinaten}$$

1 Kinematik des Massenpunktes

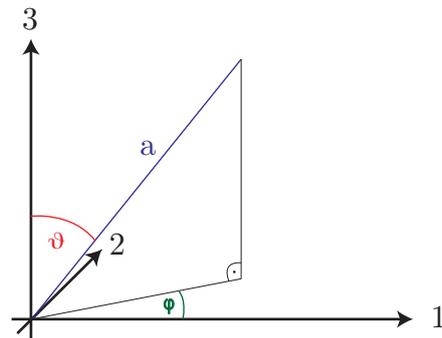


Abbildung 1.4: Kugelkoordinaten

Einheitsvektor aus \mathbf{a} machen:

$$\hat{\mathbf{a}} = \frac{\mathbf{a}}{a} = \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi \\ \cos \vartheta \end{pmatrix}$$

$$\text{Check: } \hat{a}_1^2 + \hat{a}_2^2 + \hat{a}_3^2 = \sin^2 \vartheta (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) + \cos^2 \vartheta = \sin^2 \vartheta + \cos^2 \vartheta = 1$$

Elementare Rechenregeln

Vektoren können addiert, subtrahiert und mit Skalaren multipliziert werden.

Addition

Die Vektoraddition ist kommutativ, d.h. es gilt: $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$

Geometrisch betrachtet ergibt sich diese Eigenschaft aus der *Parallelogrammregel*.

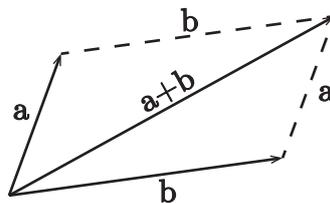


Abbildung 1.5: Addition von Vektoren

1 Kinematik des Massenpunktes

Algebraisch zeigt man dies komponentenweise:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 + a_1 \\ b_2 + a_2 \\ b_3 + a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$$

Die Vektoraddition ist assoziativ, d.h. es gilt: $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$

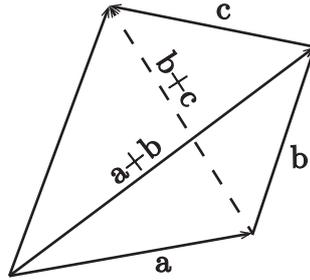


Abbildung 1.6: Assoziativität der Vektoraddition

Antiparalleler Vektor : $-\mathbf{a}$

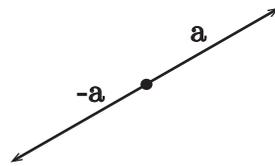


Abbildung 1.7: Antiparallele Vektoren

Subtraktion

Subtraktion eines Vektors \mathbf{b} bedeutet Addition mit $-\mathbf{b}$, d.h.:

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b})$$

Mathematisch: Die Gesamtheit der Vektoren bilden eine (kommutative) Gruppe (neutrales Element: Nullvektor $\mathbf{0}$, inverses Element: antiparalleler Vektor $-\mathbf{a}$).

Multiplikation

Zwischen Vektoren können Multiplikationen definiert werden:

1 Kinematik des Massenpunktes

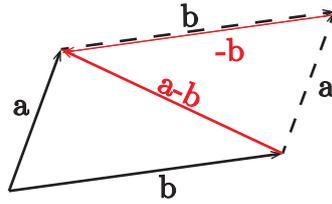


Abbildung 1.8: Subtraktion von Vektoren

1. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ inneres oder Skalarprodukt (*dot product*)
2. $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ äußeres, Kreuz- oder Vektorprodukt (*cross product*)

(Außerdem: $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ Tensorprodukt, wird vorerst nicht benötigt)

Skalarprodukt

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a \cdot b \cdot \cos \vartheta$$

Das Skalarprodukt entspricht der Projektion der Vektoren aufeinander.
andere Schreibweisen: (\mathbf{a}, \mathbf{b}) , $\langle \mathbf{a} | \mathbf{b} \rangle$

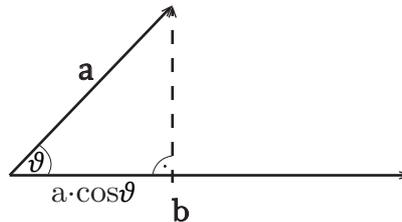


Abbildung 1.9: Veranschaulichung zum Skalarprodukt

Das Skalarprodukt ist distributiv: $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$

Zwei endl. Vektoren mit verschwindendem Skalarprodukt sind orthogonal zueinander, denn:

$$a \neq 0, b \neq 0, \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0 \Rightarrow \cos \vartheta = 0, \vartheta = \frac{\pi}{2}, \mathbf{a} \perp \mathbf{b}$$

Weiterhin gilt:

$$\mathbf{a} \parallel \mathbf{b} \Rightarrow \cos \vartheta = 1 \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = a^2 \Rightarrow \boxed{a = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}}$$

Mit dem Skalarprodukt kann man also Längen messen. Angewendet auf \mathbf{e}_i :

$$\mathbf{e}_i^2 = 1, \quad \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = 0 \text{ für } i \neq j$$

1 Kinematik des Massenpunktes

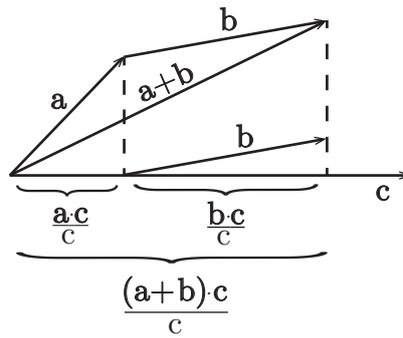


Abbildung 1.10: Distributivität des Skalarproduktes

$$\Rightarrow \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij} := \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad \text{Kronecker-Symbol}$$

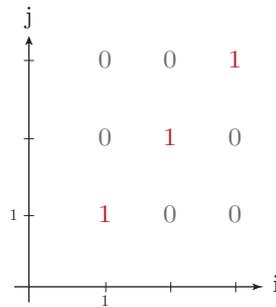


Abbildung 1.11: Veranschaulichung des Kronecker-Symbols

Berechnung des Skalarproduktes aus den Komponenten:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= (a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3) \cdot (b_1 \mathbf{e}_1 + b_2 \mathbf{e}_2 + b_3 \mathbf{e}_3) \\ &= a_1 b_1 \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 + \dots \quad (9 \text{ Terme}) \\ &= \boxed{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3} \end{aligned}$$

Eine etwas elegantere Variante zur Berechnung des Skalarprodukts ist folgende:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= \left(\sum_{i=1}^3 a_i \mathbf{e}_i \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^3 b_j \mathbf{e}_j \right) = \sum_{i,j=1}^3 a_i b_j \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j \\ &= \sum_{i,j=1}^3 a_i b_j \delta_{ij} = \sum_{i=1}^3 a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \end{aligned}$$

Anmerkung Das Kronecker-Symbol macht aus der Doppelsumme eine Einfachsumme.

Mit dem Skalarprodukt kann man neben Längen auch Winkel messen:

$$\cos \vartheta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{a b}$$

Vektorprodukt

Das Vektorprodukt ordnet zwei Vektoren einen dritten zu: $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$.
Der neue Vektor ergibt sich aus zwei Regeln:

1. $c = ab \sin \vartheta$ mit $\vartheta = \sphericalangle(a, b)$
Der Betrag c entspricht dem Flächeninhalt des von \mathbf{a} und \mathbf{b} aufgespannten Parallelogramms.
2. \mathbf{c} steht senkrecht auf \mathbf{a} und \mathbf{b} und zwar so, dass $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ ein Rechtssystem bilden. Diese Regel macht nur in drei Dimensionen Sinn.

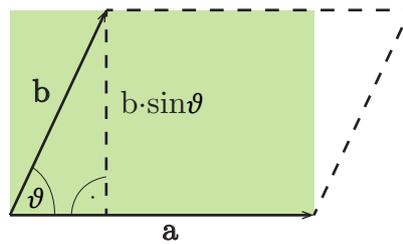


Abbildung 1.12: Veranschaulichung des Vektorproduktes

Das Vektorprodukt stellt einen Drehsinn dar.

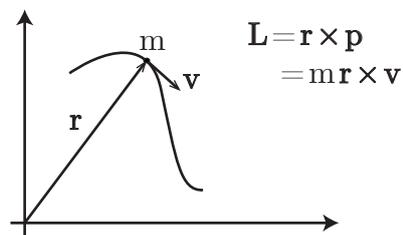


Abbildung 1.13: Physikalisches Beispiel: Drehimpuls \mathbf{L}

Das Vektorprodukt ist nicht kommutativ (im Gegensatz zum Skalarprodukt):

1 Kinematik des Massenpunktes

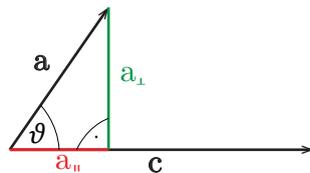
$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$$

Zwei endl. Vektoren mit verschwindendem Vektorprodukt sind kollinear, denn:

$$a \neq 0, b \neq 0, \mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0 \Rightarrow \sin \vartheta = 0, \vartheta = 0, \mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$$

Das Vektorprodukt ist distributiv (wie SP): $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}$

Beweis: Wir zerlegen \mathbf{a} und \mathbf{b} bezüglich \mathbf{c} :



$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \mathbf{a}_{\parallel} + \mathbf{a}_{\perp} \\ \mathbf{b} &= \mathbf{b}_{\parallel} + \mathbf{b}_{\perp} \end{aligned}$$

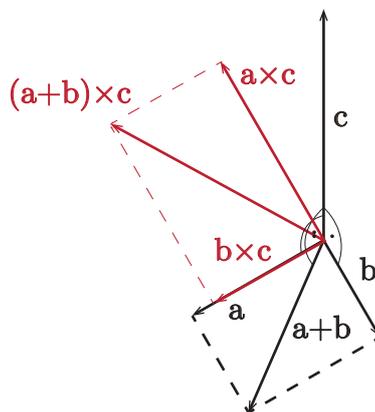
Abbildung 1.14: Zerlegung von \mathbf{a} bzgl. \mathbf{c}

Behauptung: $\mathbf{a} \times \mathbf{c} = (\mathbf{a}_{\parallel} + \mathbf{a}_{\perp}) \times \mathbf{c} \stackrel{!}{=} \mathbf{a}_{\perp} \times \mathbf{c}$

Unterbeweis:

1. $|\mathbf{a}_{\perp} \times \mathbf{c}| = a_{\perp} \cdot c \cdot \sin \frac{\pi}{2} = a_{\perp} \cdot c = a \cdot \sin \vartheta \cdot c = |\mathbf{a} \times \mathbf{c}|$
2. Die Richtung von $\mathbf{a} \times \mathbf{c}$ und $\mathbf{a}_{\perp} \times \mathbf{c}$ stimmen überein.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit (O.B.d.A) nehmen wir an, dass \mathbf{a} und \mathbf{b} senkrecht zu \mathbf{c} stehen.



$$\left. \begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{c} \\ \mathbf{b} \times \mathbf{c} \\ (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} \end{aligned} \right\} \text{ ist auch in der } (\mathbf{a}, \mathbf{b})\text{-Ebene um } 90^\circ \text{ gedreht}$$

Abbildung 1.15: Veranschaulichung zum Beweis der Distributivität

1 Kinematik des Massenpunktes

⇒ Das Kreuzprodukt mit \mathbf{c} dreht die Richtungen aller drei Vektoren in der (\mathbf{a}, \mathbf{b}) -Ebene um 90 Grad. Teilung durch c bewirkt, dass die Längen unverändert bleiben.

$$\begin{aligned}\frac{1}{c}[(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c}] &= \frac{1}{c}[(\mathbf{a} \times \mathbf{c}) + (\mathbf{b} \times \mathbf{c})] \\ \Rightarrow (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} &= ((\mathbf{a} \times \mathbf{c}) + (\mathbf{b} \times \mathbf{c})) \qquad \qquad \qquad q. e. d.\end{aligned}$$

Bemerkung Der Beweis ist ähnlich wie beim Skalarprodukt, Projektion wird durch Rotation ersetzt.

Das Vektorprodukt ist nicht assoziativ: $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \neq (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$

Lineare Unabhängigkeit und ONS

Wenn zwei Vektoren parallel (*kollinear*) sind, dann gibt es reelle Zahlen $\alpha, \beta \neq 0$, so dass: $\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} = 0 \Rightarrow \mathbf{a}, \mathbf{b}$ sind *linear abhängig*.

Allgemein: n -Vektoren $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ heißen *linear unabhängig*, falls die Gleichung $\sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{a}_i = 0$ nur durch $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$ erfüllt werden kann. Andernfalls nennt man sie *linear abhängig*.

Die Dimension eines Vektorraums ist gleich der maximalen Anzahl linear unabhängiger Vektoren und höchstens so groß wie die Raumdimension. In einem n -dimensionalen Vektorraum bildet jede Menge von n linear unabhängigen Vektoren eine *Basis*, d.h. jeder beliebige Vektor kann als Linearkombination der Basisvektoren dargestellt werden. Normalerweise konstruiert man dafür ein *Orthonormalsystem* (ONS): $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$. Der gleiche Vektor kann in verschiedenen ONS dargestellt werden:

$$\mathbf{a} = \sum_{i=1}^3 a_i \mathbf{e}_i = \sum_{j=1}^3 \bar{a}_j \bar{\mathbf{e}}_j$$

Insbesondere gilt dies für die Einheitsvektoren selbst:

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{e}}_j &= \sum_{k=1}^3 d_{jk} \mathbf{e}_k \\ \Rightarrow \bar{\mathbf{e}}_j \cdot \mathbf{e}_m &= \sum_{k=1}^3 d_{jk} \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_m = d_{jm} = \mathbf{e}_m \cdot \bar{\mathbf{e}}_j \\ \Rightarrow \mathbf{a} \cdot \bar{\mathbf{e}}_i &= \sum_{j=1}^3 \bar{a}_j \bar{\mathbf{e}}_j \cdot \bar{\mathbf{e}}_i = \bar{a}_i = \sum_{k=1}^3 a_k \mathbf{e}_k \cdot \bar{\mathbf{e}}_i = \boxed{\sum_{k=1}^3 d_{ik} a_k = \bar{a}_i}\end{aligned}$$

Für ONS gibt es also eine lineare Abbildung zwischen den Komponenten.

$D = (d_{ik})_{1 \leq i, j \leq 3}$ ist eine *Drehmatrix*.

Determinante

Die *Determinante* ordnet einer quadratischen Matrix einen Skalar zu.

$$\text{Sei } A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det A = \sum_{\text{Permutation } p} \text{sign}(p) a_{1p(1)} \cdots a_{np(n)}$$

Von einer Menge $\{1, \dots, n\}$ gibt es $n!$ Permutationen.

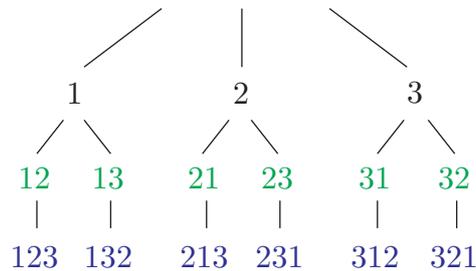


Abbildung 1.16: In $n = 3$ gibt es $3! = 6$ Permutationen.

Für eine Matrix mit $n=2$ ergibt sich:

$$\det A = \text{sign}(12) a_{11} a_{22} + \text{sign}(21) a_{12} a_{21} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$$

Für eine Matrix mit $n=3$ ergibt sich:

$$\det A = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

Das Levi-Civita-Symbol

Für die kartesischen Basisvektoren haben wir

$$\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2$$

Außerdem gilt

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$$

1 Kinematik des Massenpunktes

Damit folgt

$$\mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_k) =: \varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{falls } (i, j, k) \text{ zyklisch zu } (1, 2, 3) \\ -1 & \text{falls } (i, j, k) \text{ antizyklisch zu } (1, 2, 3) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Das *Levi-Civita-Symbol* ε_{ijk} ist der komplett antisymmetrische Tensor dritter Stufe.

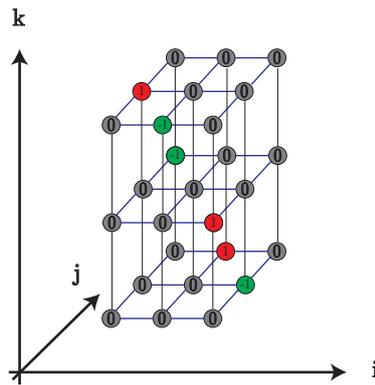


Abbildung 1.17: Veranschaulichung zum Levi-Civita-Symbol

Es kann folgendermaßen durch Kronecker-Symbole ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{klm} &= \delta_{k1}(\delta_{l2}\delta_{m3} - \delta_{l3}\delta_{m2}) + \delta_{k2}(\delta_{l3}\delta_{m1} - \delta_{l1}\delta_{m3}) + \delta_{k3}(\delta_{l1}\delta_{m2} - \delta_{l2}\delta_{m1}) \\ &= \delta_{k1} \det \begin{pmatrix} \delta_{l2} & \delta_{l3} \\ \delta_{m2} & \delta_{m3} \end{pmatrix} + \delta_{k2} \det \begin{pmatrix} \delta_{l3} & \delta_{l1} \\ \delta_{m3} & \delta_{m1} \end{pmatrix} + \delta_{k3} \det \begin{pmatrix} \delta_{l1} & \delta_{l2} \\ \delta_{m1} & \delta_{m2} \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} \delta_{k1} & \delta_{k2} & \delta_{k3} \\ \delta_{l1} & \delta_{l2} & \delta_{l3} \\ \delta_{m1} & \delta_{m2} & \delta_{m3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Mit dem Levi-Civita-Symbol kann man jetzt schreiben:

$$\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j = \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} \mathbf{e}_k$$

Die Determinante einer 3×3 Matrix kann unter Verwendung des Levi-Civita Symbols folgendermassen geschrieben werden:

$$\det A = \sum_{ijk} \varepsilon_{ijk} a_{1i} a_{2j} a_{3k}$$

1 Kinematik des Massenpunktes

Berechnung des Vektorproduktes mit Hilfe des Levi-Civita-Symbols

Für das Kreuzprodukt ergibt sich jetzt:

$$\begin{aligned} \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= \left(\sum_{i=1}^3 a_i \mathbf{e}_i \right) \times \left(\sum_{j=1}^3 b_j \mathbf{e}_j \right) = \sum_{i,j=1}^3 a_i b_j \mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j = \sum_{i,j,k=1}^3 a_i b_j \varepsilon_{ijk} \mathbf{e}_k \\ &= \sum_{k=1}^3 c_k \mathbf{e}_k \end{aligned}$$

$$\Rightarrow c_k = \sum_{i,j=1}^3 \varepsilon_{ijk} a_i b_j$$

Ausschreiben in die einzelnen Komponenten ergibt somit:

$$c_1 = a_2 b_3 - a_3 b_2$$

$$c_2 = a_3 b_1 - a_1 b_3$$

$$c_3 = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

$$\Rightarrow \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \sum_{i,j,k=1}^3 \varepsilon_{ijk} a_i b_j \mathbf{e}_k = \det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$$

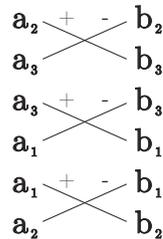


Abbildung 1.18: Merkgel zur Berechnung des Vektorproduktes

Höhere Vektorprodukte

Doppelkreuzprodukt : $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$

Spatprodukt : $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$

1 Kinematik des Massenpunktes

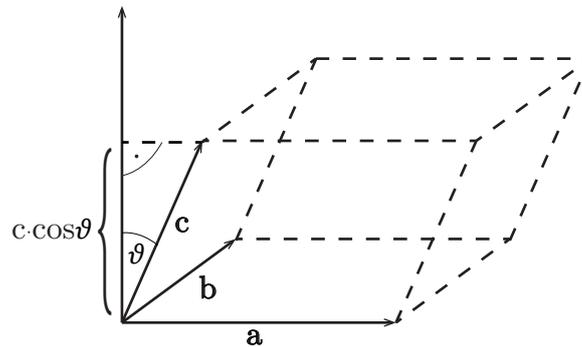


Abbildung 1.19: Spatprodukt als Volumen eines Parallelepipeds

Der Betrag des Spatproduktes ist das Volumen des Parallelepipeds, das von \mathbf{a} , \mathbf{b} und \mathbf{c} aufgespannt wird. Vorzeichen: $+$ \rightarrow Rechtssystem, $-$ \rightarrow Linkssystem. Folgende Beziehungen lassen sich beweisen:

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \sum_{i,j,k} \varepsilon_{ijk} a_i b_j c_k = \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$$

Die letzte Beziehung ist als *Entwicklungssatz* oder *BAC-CAB-Regel* bekannt.

Tensoren

Bisher wurden Skalare, Vektoren und Matrizen unterschieden. Tatsächlich lassen sich diese Begriffe vereinheitlichen.

Definition: Ein *Tensor* ist eine multilineare Abbildung, die invariant unter Drehungen und Drehspiegelungen ist. Ein Tensor n-ter Stufe im \mathbb{R}^3 ist eine indizierte Größe mit n Indizes. Er hat also 3^n Komponenten.

Tensor 0. Stufe	\rightarrow	Skalar
Tensor 1. Stufe	\rightarrow	Vektor
Tensor 2. Stufe	\rightarrow	Matrix

Ein Tensor 2. Stufe ist also mehr als eine Matrix \underline{T} mit Komponenten t_{ij} . Die lineare Abbildung $\mathbf{b} = \underline{T}\mathbf{a}$ muss invariant sein unter einer Drehung, die durch die Drehmatrix \underline{R} beschrieben wird. Die führt auf die Bedingung $\underline{T}' = \underline{R}\underline{T}\underline{R}^{-1}$.

1 Kinematik des Massenpunktes

Ein einfaches Beispiel ist das *direkte Produkt* zweier Vektoren definiert durch

$$t_{ij} = a_i b_j \Rightarrow \underline{\underline{T}} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{pmatrix}$$

Zusätzlich zu $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ (Skalarprodukt) und $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ (Vektorprodukt) haben wir also noch $\underline{\underline{T}} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ (direktes Produkt) als mögliche Verknüpfung zweier Vektoren. Dabei entsteht jeweils ein Tensor anderer Stufe. Andere Beispiele für Tensoren:

$$\begin{aligned} \delta_{ij} & \text{ Tensor 2.Stufe} \\ \varepsilon_{ijk} & \text{ Tensor 3.Stufe} \\ \sum_k \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{lmk} & \text{ Tensor 4.Stufe, durch } \textit{Verjüngung} \text{ eines Tensors 6. Stufe gewonnen} \end{aligned}$$

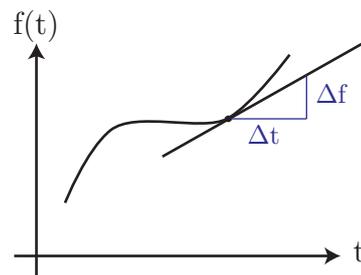
In der Physik gibt es viele Tensoren, wichtige Beispiele sind der Trägheitstensor in der Klassischen Mechanik und der Spannungstensor in der Elastizitätstheorie.

1.3 Geschwindigkeit und Beschleunigung

Differentialquotient oder **Ableitung** einer Funktion $f(t)$:

$$\frac{df(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

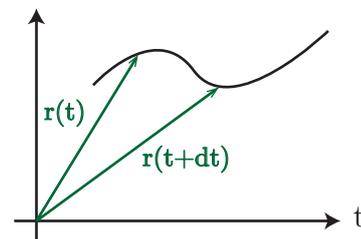
Geometrisch entspricht dies der Steigung am Punkt t . Die entsprechende Gerade ist die lineare Näherung für die Kurve.



Das gleiche Konzept kann auch auf vektorwertige Funktionen angewendet werden:

$$\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t}$$

Die Ableitung erfolgt also komponentenweise.

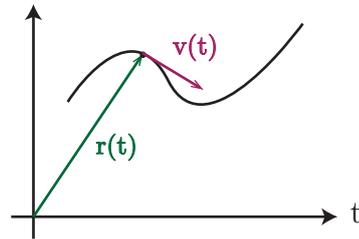


1 Kinematik des Massenpunktes

Die Ableitung des Ortsvektors ist der *Geschwindigkeitsvektor*:

$$\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \dot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{v}(t)$$

Geometrisch handelt es sich um einen Tangentialvektor an die Bahnkurve. Die entsprechende Gerade ist die lineare Näherung.



Auch von dem Geschwindigkeitsvektor kann eine Ableitung gebildet werden:

$$\frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = \dot{\mathbf{v}} = \frac{d^2\mathbf{r}(t)}{dt^2} = \ddot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{a}(t) \text{ Beschleunigungsvektor}$$

In der Klassischen Mechanik spielen höhere Ableitungen (glücklicherweise) keine Rolle. Die typische Fragestellung besteht darin, aus einer gegebenen Beschleunigung $\mathbf{a}(t)$ die Bahnkurve $\mathbf{r}(t)$ zu berechnen.

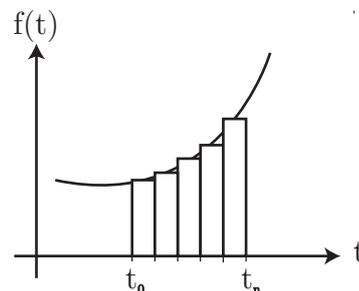
→ Wie kommt man von $\mathbf{a}(t) = \ddot{\mathbf{r}}(t)$ zu $\mathbf{r}(t)$?

⇒ Integration als Umkehrung der Differentiation

Integral einer Funktion $f(t)$:

$$\int_{t_0}^{t_n} f(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \Delta t f\left(\frac{t_{i-1} + t_i}{2}\right)$$

Geometrisch handelt es sich um den Flächeninhalt unter der Kurve.



Beziehung zur Ableitung:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{t_0}^t f(t') dt' &= f(t) \\ \int_{t_0}^{t_n} \frac{df(t)}{dt} dt &= f(t_n) - f(t_0) \end{aligned} \right\} \text{Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung}$$

Die Übertragung auf vektorwertige Funktionen erfolgt wieder komponentenweise:

$$\int_{t_0}^{t_n} \mathbf{r}(t) dt = \begin{pmatrix} \int_{t_0}^{t_n} x_1(t) dt \\ \int_{t_0}^{t_n} x_2(t) dt \\ \int_{t_0}^{t_n} x_3(t) dt \end{pmatrix}$$

1 Kinematik des Massenpunktes

Für einen Massenpunkt haben wir also:

1. Ortsvektor

$$\mathbf{r}(t) = \sum_{i=1}^3 x_i(t) \mathbf{e}_i$$

2. Geschwindigkeitsvektor

$$\mathbf{v}(t) = \sum_{i=1}^3 \dot{x}_i(t) \mathbf{e}_i$$

3. Beschleunigungsvektor

$$\mathbf{a}(t) = \sum_{i=1}^3 \ddot{x}_i(t) \mathbf{e}_i$$

Um den Beschleunigungsvektor (komponentenweise) integrieren zu können, benötigen wir noch Anfangsbedingungen:

$$\mathbf{v}(t_0) = \text{const.} = \mathbf{v}_0, \quad \mathbf{r}(t_0) = \text{const.} = \mathbf{r}_0$$

Gegeben: $\mathbf{a}(t)$

$$\Rightarrow \mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 + \int_{t_0}^t dt'' \mathbf{a}(t'')$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0(t - t_0) + \int_{t_0}^t dt' \left[\int_{t_0}^{t'} dt'' a(t'') \right]}$$

Die Richtigkeit dieser Formel kann durch Ableitung überprüft werden:

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{v}_0 + \int_{t_0}^t dt'' \mathbf{a}(t'')$$

$$\ddot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{a}(t) \quad \checkmark$$

Auch die Anfangsbedingungen stimmen:

$$\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0, \quad \dot{\mathbf{r}}(t_0) = \mathbf{v}(t_0) = \mathbf{v}_0 \quad \checkmark$$

Beispiele

1 Kinematik des Massenpunktes

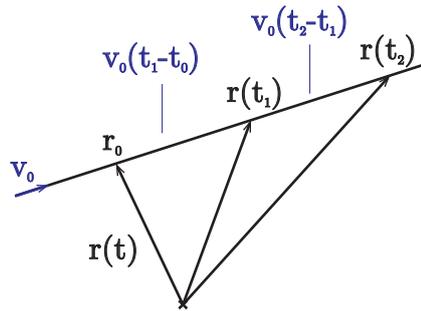


Abbildung 1.20: geradlinige Bewegung

1. verschwindende Beschleunigung: $\mathbf{a}(t) = \mathbf{0}$

$$\Rightarrow \mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0$$

$$\Rightarrow \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0(t - t_0)$$

geradlinig: in Richtung von \mathbf{v}_0

gleichförmig: in gleichen Intervallen werden gleiche Strecken zurückgelegt.

Beispiel: Raumschiff

2. konstante Beschleunigung: $\mathbf{a}(t) = \mathbf{a}_0$

$$\Rightarrow \mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}_0(t - t_0)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mathbf{r}(t) &= \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0(t - t_0) + \int_{t_0}^t dt' \mathbf{a}_0(t' - t_0) \\ &= \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0(t - t_0) + \mathbf{a}_0\left(\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t_0^2 - (t - t_0)t_0\right) \\ &= \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\mathbf{a}_0(t - t_0)^2 \end{aligned}$$

Die gleichmäßig beschleunigte Bewegung ist die Überlagerung einer geradlinig gleichförmigen Bewegung mit \mathbf{v}_0 und einer geradlinig beschleunigten Bewegung mit \mathbf{a}_0 .

Beispiel: Schneeball, Kanonenkugel

Ein Spezialfall ist der freie Fall:

$$\mathbf{v}_0 = 0, \mathbf{a}_0 = g \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, t_0 = 0$$

1 Kinematik des Massenpunktes

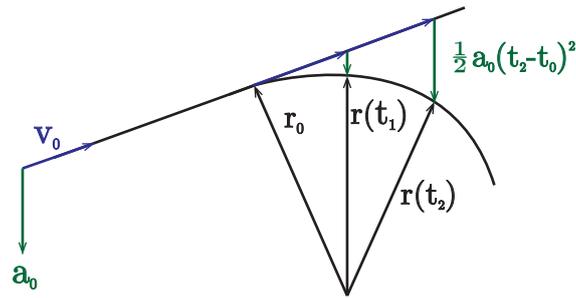


Abbildung 1.21: Wurfparabel bei glm. beschl. Bewegung

$$\Rightarrow \text{Fallstrecke } s = |\mathbf{x}_3(t)| = \frac{1}{2}gt^2$$

Erdbeschleunigung $g = 9.81 \text{ m/s}^2$

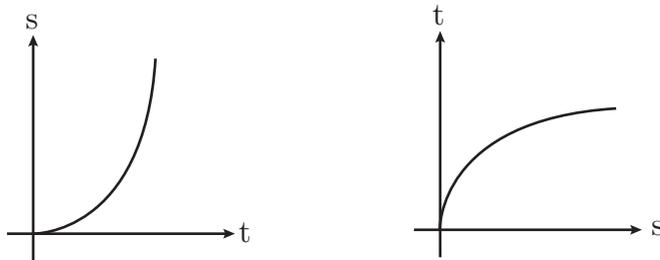


Abbildung 1.22: Weg-Zeit-Diagramm für freien Fall

Im allgemeinen sind Bewegungsformen komplizierter \rightarrow Vektoranalysis

1.4 Mathematischer Einschub 2: Vektoranalysis

Verschiedene Trajektorien $\mathbf{r}(t)$ können zur gleichen *Raumkurve* führen.

Raumkurve = Menge aller Punkte $\{\mathbf{r}(t) | t_1 \leq t \leq t_2\}$

Die vektorwertige Funktion $\mathbf{r}(t)$ ist nur eine mögliche *Parametrisierung* der Raumkurve.

Die gleiche Raumkurve könnte auch doppelt so schnell oder in umgekehrter Richtung durchlaufen werden.

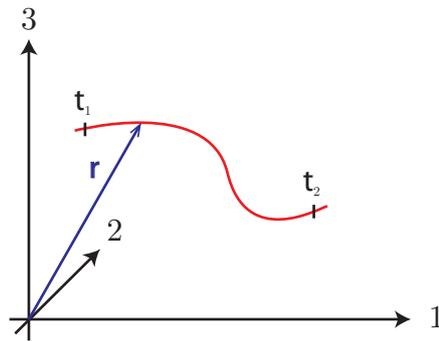


Abbildung 1.23: Veranschaulichung einer Raumkurve

Beispiele für Raumkurven

1) Kreisbewegung in der x-y Ebene

Die Funktion

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} R \cos \varphi \\ R \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \stackrel{\varphi = \omega t}{=} \begin{pmatrix} R \cos \omega t \\ R \sin \omega t \\ 0 \end{pmatrix}$$

ist eine mögliche Parametrisierung der Kreisbewegung. Der Umlauf eines Kreises

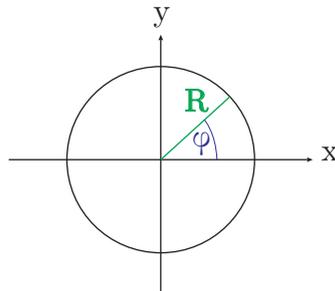


Abbildung 1.24: Raumkurve einer Kreisbewegung

beträgt 2π und es gilt:

$$2\pi = \omega T \Leftrightarrow \omega = \frac{2\pi}{T}$$

$\left[\begin{array}{l} T \\ \omega \end{array} \right.$ Periode
Kreisfrequenz

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}} = R\omega \begin{pmatrix} -\sin \omega t \\ \cos \omega t \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v = \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| = R\omega$$

2) Schraubenlinie

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} R \cos \omega t \\ R \sin \omega t \\ bt \end{pmatrix} \quad \left[\begin{array}{l} b \\ z_0 = b \frac{2\pi}{\omega} \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{Geschwindigkeit in } z\text{-Richtung} \\ \text{Ganghöhe} \end{array}$$

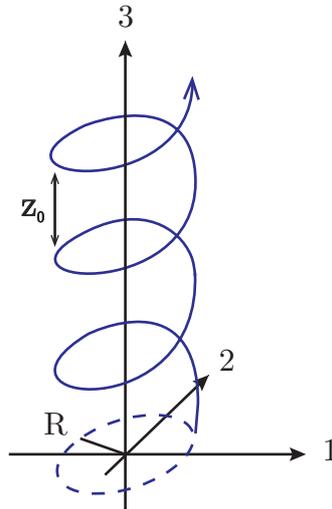


Abbildung 1.25: Raumkurve einer Schraubenlinie

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} -R\omega \sin \omega t \\ R\omega \cos \omega t \\ b \end{pmatrix} \Rightarrow v = \sqrt{R^2\omega^2 + b^2} > R\omega$$

Bogenlänge

Was ist die Länge L einer Raumkurve (*Bogenlänge*)?

Sie sollte auf jeden Fall unabhängig von der gewählten Parametrisierung sein!

Wir zerlegen das Intervall $[t_0, t_n]$ in n Teilintervalle der Länge

$$\Delta t = \frac{t_n - t_0}{n} \Rightarrow t_i = t_0 + i \cdot \Delta t$$

Approximation durch Polygonzug:

$$L = \sum_{i=1}^n |\mathbf{r}(t_i) - \mathbf{r}(t_{i-1})| = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\mathbf{r}(t_i) - \mathbf{r}(t_{i-1})}{\Delta t} \right| \Delta t \xrightarrow[\Delta t \rightarrow 0]{n \rightarrow \infty} \int_{t_0}^{t_n} dt \left| \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} \right|$$

Invarianz unter Umparametrisierung: neue Parametrisierung durch u

$$t = t(u) \Rightarrow L = \int dt \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| = \int dt \left| \frac{d\mathbf{r}}{du} \right| \left| \frac{du}{dt} \right| \underset{\text{Substitutionsregel}}{=} \int du \left| \frac{d\mathbf{r}}{du} \right| \checkmark$$

1 Kinematik des Massenpunktes

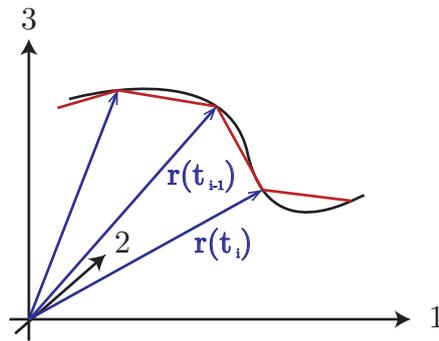


Abbildung 1.26: Approximation einer Raumkurve

Bogenlänge als Funktion der Zeit:

$$s(t) = \int_{t_0}^t dt' \left| \frac{d\mathbf{r}(t')}{dt'} \right|$$

$$\Rightarrow \frac{ds}{dt} = \left| \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} \right| > 0 \quad \text{bei Bewegung: Bogenlänge wächst monoton}$$

$$\Rightarrow \text{Umkehr ist eindeutig, } t = t(s)$$

\Rightarrow *Parametrisierung nach der Bogenlänge oder natürliche Parametrisierung*

$$\mathbf{r}(t) \rightarrow \mathbf{r}(t(s)) = \mathbf{r}(s)$$

Beispiele

1. Kreisbewegung

$$v = R \cdot \omega = \frac{ds}{dt} \Rightarrow s = R \omega t \Rightarrow t = \frac{s}{R\omega}$$
$$\Rightarrow \mathbf{r}(s) = R \begin{pmatrix} \cos \frac{s}{R} \\ \sin \frac{s}{R} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ein Umlauf entspricht $s = 2\pi R$, also genau dem Umfang.

1 Kinematik des Massenpunktes

2. Schraubenlinie

$$v = \sqrt{R^2\omega^2 + b^2} = \frac{ds}{dt} = \text{const.}$$
$$\Rightarrow s = v \cdot t \Rightarrow \mathbf{r} = \begin{pmatrix} R \cos \frac{\omega s}{v} \\ R \sin \frac{\omega s}{v} \\ \frac{bs}{v} \end{pmatrix}$$

Begleitendes Dreibein

Auch das Koordinatensystem kann auf die Bahnkurve bezogen werden:
begleitendes Dreibein = ONS, das mit dem Massenpunkt mitwandert

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{t}} & \quad \text{Tangentialeinheitsvektor} \\ \hat{\mathbf{n}} & \quad \text{Normaleneinheitsvektor} \\ \hat{\mathbf{b}} = \hat{\mathbf{t}} \times \hat{\mathbf{n}} & \quad \text{Binormaleneinheitsvektor} \end{aligned}$$

\Rightarrow Rechtssystem, $(\hat{\mathbf{t}}, \hat{\mathbf{n}}, \hat{\mathbf{b}})$ sind Funktionen der Bogenlänge s . Regeln für die

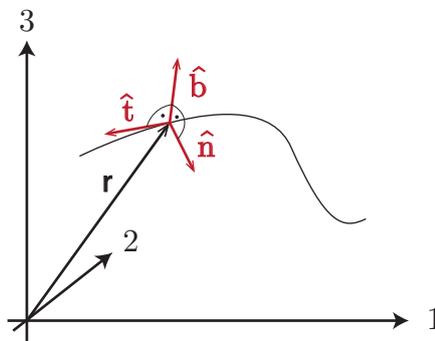


Abbildung 1.27: begleitendes Dreibein

Ableitung von zeitabhängigen Vektoren:

$$\frac{d}{dt}[f(t)\mathbf{a}(t)] = \dot{f}(t)\mathbf{a}(t) + f(t)\dot{\mathbf{a}}(t)$$

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{a}(t) \cdot \mathbf{b}(t)] = \dot{\mathbf{a}}(t) \cdot \mathbf{b}(t) + \mathbf{a}(t) \cdot \dot{\mathbf{b}}(t)$$

1 Kinematik des Massenpunktes

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{a}(t) \times \mathbf{b}(t)] = \dot{\mathbf{a}}(t) \times \mathbf{b}(t) + \mathbf{a}(t) \times \dot{\mathbf{b}}(t)$$

Die Beweise erfolgen komponentenweise.

Beispiel Einheitsvektor $\mathbf{e}(t)$

$$\begin{aligned}\mathbf{e}(t)^2 &= \mathbf{e}(t) \cdot \mathbf{e}(t) = 1 \\ \Rightarrow 0 &= 2 \dot{\mathbf{e}}(t) \cdot \mathbf{e}(t) \\ \Rightarrow \dot{\mathbf{e}}(t) &\perp \mathbf{e}(t)\end{aligned}$$

Definition Tangentialeinheitsvektor

$$\hat{\mathbf{t}} = \frac{\frac{d\mathbf{r}}{dt}}{\left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|} = \frac{\dot{\mathbf{r}}}{\frac{ds}{dt}}$$

Bei Parametrisierung durch die Bogenlänge: $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s(t))$

$$\hat{\mathbf{t}} = \frac{\frac{d\mathbf{r}}{ds} \frac{ds}{dt}}{\frac{ds}{dt}} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \quad \text{ist automatisch normiert}$$

Im allgemeinen Fall ändert $\hat{\mathbf{t}}(s)$ seine Richtung:

$$\left| \frac{d\hat{\mathbf{t}}(s)}{ds} \right| =: \kappa(s) \quad \text{Krümmung}, \quad \rho := \frac{1}{\kappa} \quad \text{Krümmungsradius}$$

Beispiele

1. Kreisbewegung

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{t}} &= \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \begin{pmatrix} -\sin\left(\frac{s}{R}\right) \\ \cos\left(\frac{s}{R}\right) \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{d\hat{\mathbf{t}}}{ds} = \frac{1}{R} \begin{pmatrix} -\cos\left(\frac{s}{R}\right) \\ -\sin\left(\frac{s}{R}\right) \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \kappa &= \left| \frac{d\hat{\mathbf{t}}}{ds} \right| = \frac{1}{R}, \quad \rho = R \quad (\text{hängt nicht von } s \text{ ab})\end{aligned}$$

2. Schraubenlinie

$$\hat{\mathbf{t}} = \begin{pmatrix} -\frac{R\omega}{v} \sin\left(\frac{\omega s}{v}\right) \\ \frac{R\omega}{v} \cos\left(\frac{\omega s}{v}\right) \\ \frac{b}{v} \end{pmatrix} \quad v = \sqrt{R^2\omega^2 + b^2}$$

$$\text{Überprüfung: } |\hat{\mathbf{t}}|^2 = \frac{R\omega^2}{v^2} + \frac{b^2}{v^2} = 1 \quad \checkmark$$

1 Kinematik des Massenpunktes

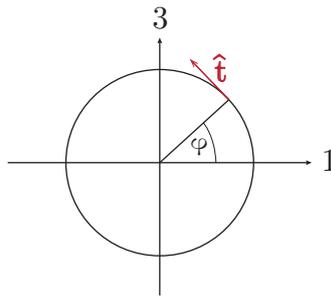


Abbildung 1.28: Veranschaulichung des Tangentialeinheitsvektors

$$\frac{d\hat{\mathbf{t}}}{ds} = \begin{pmatrix} -\frac{R\omega^2}{v^2} \cos\left(\frac{\omega s}{v}\right) \\ -\frac{R\omega^2}{v^2} \sin\left(\frac{\omega s}{v}\right) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \kappa = \frac{R\omega^2}{v^2} = \frac{R\omega^2}{R^2\omega^2 + b^2} = \frac{1}{R + \frac{b^2}{R\omega^2}} < \frac{1}{R}$$

$$\rho = R + \frac{b^2}{R\omega^2} > R \quad \text{für } b \neq 0$$

Die Krümmung der Schraubenlinie ist kleiner als beim Kreis (der Krümmungsradius ist größer), weil die Bahnkurve gestreckt wurde.

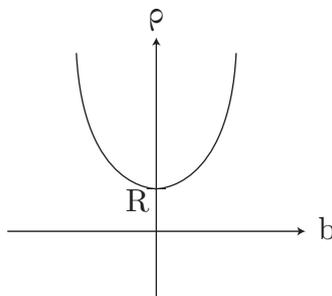


Abbildung 1.29: Krümmungsradius einer Schraubenlinie

Definition Normaleneinheitsvektor

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{\frac{d\hat{\mathbf{t}}}{ds}}{\left| \frac{d\hat{\mathbf{t}}}{ds} \right|} = \rho \frac{d\hat{\mathbf{t}}}{ds} \Rightarrow \frac{d\hat{\mathbf{t}}}{ds} = \kappa \hat{\mathbf{n}}$$

1 Kinematik des Massenpunktes

Die von $\hat{\mathbf{t}}$ und $\hat{\mathbf{n}}$ aufgespannte Ebene heißt *Schmiegeebene*. Erfolgt die Bewegung in einer festen Ebene, dann ist dies die Schmiegeebene. Im allgemeinen Fall dreht sich das Dreibein aus der Schmiegeebene heraus. Dann ändert sich auch der Binormaleneinheitsvektor.

$$\hat{\mathbf{b}} = \hat{\mathbf{t}} \times \hat{\mathbf{n}} \Rightarrow \frac{d\hat{\mathbf{b}}}{ds} = \frac{d\hat{\mathbf{t}}}{ds} \times \hat{\mathbf{n}} + \hat{\mathbf{t}} \times \frac{d\hat{\mathbf{n}}}{ds} \Rightarrow \frac{d\hat{\mathbf{b}}}{ds} \perp \hat{\mathbf{t}}$$

Außerdem gilt:

$$\frac{d\hat{\mathbf{b}}}{ds} \perp \hat{\mathbf{b}} \Rightarrow \frac{d\hat{\mathbf{b}}}{ds} = -\tau \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad (\text{da ONS})$$

τ *Torsion* oder *Windung*

$\sigma = \frac{1}{\tau}$ *Torsionsradius*

Bewegungsgleichungen für das Dreibein:

$$\boxed{\frac{d\hat{\mathbf{t}}}{ds} = \kappa \hat{\mathbf{n}}}, \quad \boxed{\frac{d\hat{\mathbf{b}}}{ds} = -\tau \hat{\mathbf{n}}}$$

Was ist mit $\frac{d\hat{\mathbf{n}}}{ds}$?

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{b}} \times \hat{\mathbf{t}} &= -\hat{\mathbf{t}} \times \hat{\mathbf{b}} = -\hat{\mathbf{t}} \times (\hat{\mathbf{t}} \times \hat{\mathbf{n}}) \stackrel{\text{Entwicklungs-}}{\text{satz}} = -(\hat{\mathbf{t}}(\hat{\mathbf{t}} \cdot \hat{\mathbf{n}}) - \hat{\mathbf{n}}(\hat{\mathbf{t}} \cdot \hat{\mathbf{t}})) \\ &= \hat{\mathbf{n}} \\ \Rightarrow \frac{d\hat{\mathbf{n}}}{ds} &= \frac{d\hat{\mathbf{b}}}{ds} \times \hat{\mathbf{t}} + \hat{\mathbf{b}} \times \frac{d\hat{\mathbf{t}}}{ds} = -\tau(\hat{\mathbf{n}} \times \hat{\mathbf{t}}) + \kappa(\hat{\mathbf{b}} \times \hat{\mathbf{n}}) \\ \Rightarrow \boxed{\frac{d\hat{\mathbf{n}}}{ds} = \tau \hat{\mathbf{b}} - \kappa \hat{\mathbf{t}}} & \quad \text{Frenet'sche Formeln} \end{aligned}$$

Allgemeine Formeln (ohne Beweis):

$$\kappa = \frac{|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}|}{|\dot{\mathbf{r}}|^3}, \quad \tau = \frac{\det(\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}})}{|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}|^2}$$

Bei Parametrisierung nach der Bogenlänge ergibt sich:

$$\kappa = |\ddot{\mathbf{r}}|, \quad \tau = \frac{\det(\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}})}{\kappa^2}$$

Ohne Beweis: Krümmung und Torsion sind invariant unter orientierungserhaltender Umparametrisierung. Bei einer orientierungsumkehrenden Umparametrisierung bleibt κ gleich und τ ändert sein Vorzeichen.

Beispiele

1 Kinematik des Massenpunktes

1. Kreisbewegung $\hat{\mathbf{b}} = \mathbf{e}_3$

$$\Rightarrow \frac{d\hat{\mathbf{b}}}{ds} = 0 \Rightarrow \tau = 0$$

2. Schraubenlinie

$$\text{Normalenvektor } \hat{\mathbf{n}} = \begin{pmatrix} -\cos\left(\frac{\omega s}{v}\right) \\ -\sin\left(\frac{\omega s}{v}\right) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{wie bei Kreisbewegung})$$

$$\text{Binormalenvektor } \hat{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} \frac{b}{v} \sin\left(\frac{\omega s}{v}\right) \\ -\frac{b}{v} \cos\left(\frac{\omega s}{v}\right) \\ \frac{R\omega}{v} \end{pmatrix} \neq \mathbf{e}_3 \text{ f\"ur } b \neq 0$$

$$\text{Torsion } \tau = \frac{b\omega}{v^2} = \frac{b\omega}{R^2\omega^2 + b^2} \xrightarrow{b \rightarrow 0} 0$$

3. Geradlinige Bewegung: $\kappa = \tau = 0$

4. Wurfparabel: $\tau = 0$

5. Elliptische Schraubenlinie:

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} a_1 \cos(\omega t) \\ a_2 \sin(\omega t) \\ bt \end{pmatrix}$$

6. Zykloide

$$r(\varphi) = \begin{pmatrix} R\varphi + R \sin \varphi \\ R + R \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} \varphi + \sin \varphi \\ 1 + \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

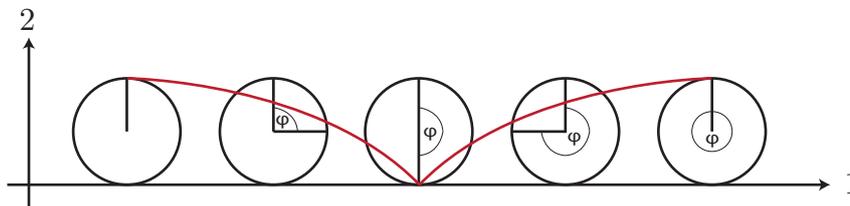


Abbildung 1.30: Zykloide

1 Kinematik des Massenpunktes

7. Gekrümmte Schraubenlinie: Bewegung auf der Oberfläche eines Torus

$$\mathbf{r}(\varphi, \vartheta) = \begin{pmatrix} (a + R \cos \vartheta) \cos \varphi \\ (a + R \cos \vartheta) \sin \varphi \\ R \sin \vartheta \end{pmatrix}$$

z.Bsp: $\varphi = \omega_1 t$, $\vartheta = \omega_2 t$

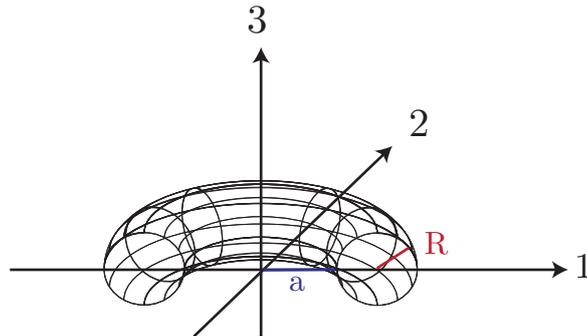


Abbildung 1.31: Torus

Exkurs: Anwendungen von Raumkurven außerhalb der Klassischen Mechanik

1. Polymerphysik

Polymere sind Kettenmoleküle, z.Bsp. Polyethylen (PE) $\left[\begin{array}{c} H & H \\ | & | \\ -C & -C- \\ | & | \\ H & H \end{array} \right]_n$

Bogenlänge $L =$ Länge des Polymers

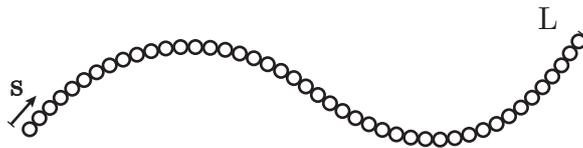


Abbildung 1.32: Polymer als Kette

Energie des Polymers: Funktion von L, κ, τ

1 Kinematik des Massenpunktes

Wichtigstes Modell in der Polymerphysik: *semiflexible Kette*

$$\mathcal{H} = \frac{k}{2} \int_0^L ds \kappa(s)^2 = \frac{k}{2} \int_0^L ds \left(\frac{d\hat{\mathbf{t}}}{ds} \right)^2 \quad (\text{KRATKY und POROD '49})$$

k Biegesteifigkeit (elastische Konstante)

$|\hat{\mathbf{t}}| = 1$ Parametrisierung nach der Bogenlänge ($L = \text{const}$)

2. Superstringtheorie

Dimension $d = 1$ (Zeit) + 9 (Raum) = 10

Jedes Teilchen ist ein eindimensionales Objekt im Raum (*String*). Strings

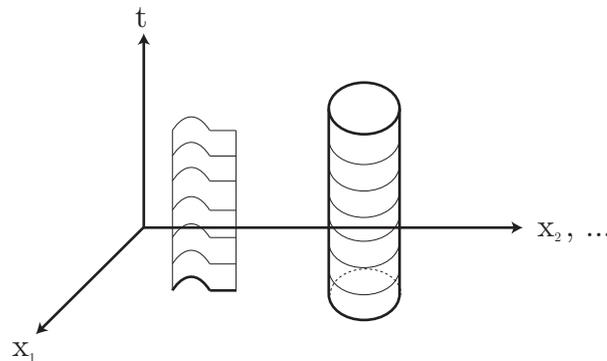


Abbildung 1.33: Weltflächen in der Stringtheorie.

können offen oder geschlossen sein.

$$S = -\frac{T_0}{c} \int d\tau ds \sqrt{-\gamma} \quad \text{mit} \quad \begin{array}{l} S \text{ Wirkung (skalare Größe)} \\ \tau \quad \text{Zeit} \\ s \quad \text{Bogenlänge} \\ T_0 \quad \text{Spannung} \\ c \quad \text{Lichtgeschwindigkeit} \\ \gamma \quad \text{Metrik} \end{array}$$

Hierbei handelt es sich um ein Integral über *Weltflächen*.

1.5 Geschwindigkeit und Beschleunigung im mitbewegten System

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \frac{ds}{dt} = \hat{\mathbf{t}} \cdot v$$

1 Kinematik des Massenpunktes

⇒ Geschwindigkeitsvektor ist tangential

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \dot{v} \hat{\mathbf{t}} + v \frac{d\hat{\mathbf{t}}}{dt} = \dot{v} \hat{\mathbf{t}} + v \frac{d\hat{\mathbf{t}}}{ds} \frac{ds}{dt} \stackrel{\text{Frenet}}{=} \dot{v} \hat{\mathbf{t}} + v^2 \kappa \hat{\mathbf{n}}$$

Die Beschleunigung liegt also in der Schmiegeebene und hat 2 Anteile:

$$\begin{aligned} a_t &= \dot{v} && \text{Tangentialbeschleunigung} \\ a_n &= \kappa v^2 = \frac{v^2}{\rho} && \text{Normalbeschleunigung} \end{aligned}$$

Eine Bewegung kann also beschleunigt sein, obwohl $\dot{v} = 0$. Dies spiegelt wieder, dass ein Vektor sowohl Betrag als auch Richtung hat.

Beispiel Kreisbewegung (gleichförmig)

$$\begin{aligned} a_t &= \frac{d}{dt}(R\omega) = 0 \quad \text{da } \omega = \text{const.} \\ a_n &= \frac{1}{R}(R\omega)^2 = R\omega^2 \quad \text{Zentrifugalbeschleunigung} \end{aligned}$$

Physikalische Probleme haben oft räumliche Symmetrien, die man ausnützen kann, um Geschwindigkeit und Beschleunigung auszurechnen.

1.6 Mathematischer Einschub 3: Koordinatensysteme

Wenn möglich, verwendet man ein Koordinatensystem, das der Symmetrie des Problems angepasst ist. Der Übergang von einem Koordinatensystem ins andere muss wohldefiniert sein. Die drei wichtigsten Fälle werden nun vorgestellt:

1. kartesische Koordinaten

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

2. Zylinderkoordinaten

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ z \end{pmatrix}$$

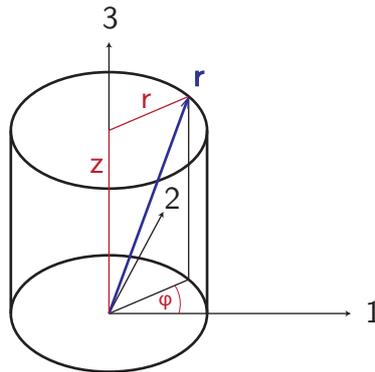


Abbildung 1.34: Zylinderkoordinaten

3. Kugelkoordinaten

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} r \sin \vartheta \cos \varphi \\ r \sin \vartheta \sin \varphi \\ r \cos \vartheta \end{pmatrix}$$

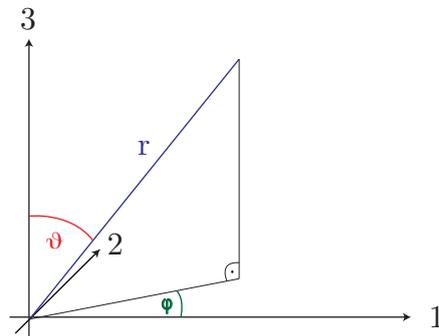


Abbildung 1.35: Kugelkoordinaten

Die drei Koordinatentupel (x_1, x_2, x_3) , (r, φ, z) und (r, ϑ, φ) beschreiben den gleichen Ort. Deshalb muss es Transformationen geben, die an (fast) jedem Punkt P (lokal) umkehrbar sind.

Dabei bedeutet:

für fast jeden Punkt: darf in Bereichen niedriger Dimension verletzt sein

lokal: gilt in einer Umgebung von P

1 Kinematik des Massenpunktes

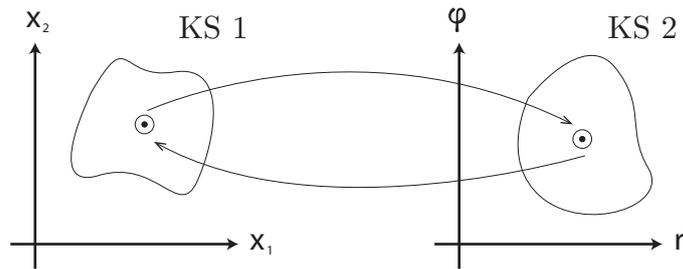


Abbildung 1.36: Veranschaulichung zur Koordinatentransformation

Beispiel Polarkoordinaten (Zylinderkoordinaten mit $z = 0$ bzw. Kugelkoordinaten mit $\vartheta = \frac{\pi}{2}$)

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = r \cos \varphi \\ x_2 = r \sin \varphi \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \\ \varphi = \arctan \frac{x_2}{x_1} \text{ für } x_1 > 0 \text{ (sonst } +\pi) \end{array}$$

\Rightarrow alle Paare $(r = 0, \varphi)$ werden auf $x_1 = x_2 = 0$ abgebildet.

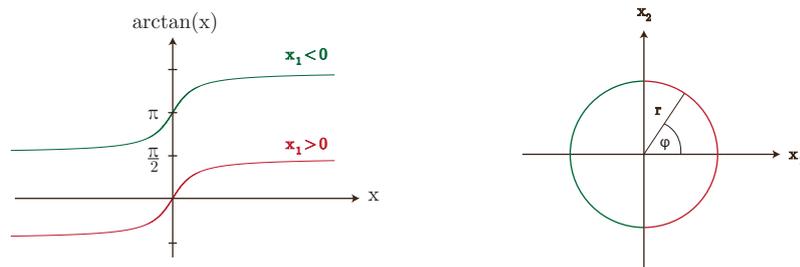


Abbildung 1.37: Berechnung des Winkels in Polarkoordinaten.

\Rightarrow Umkehrung für $r = 0$ ist nicht eindeutig, aber das ist nur eine eindimensionale Ausnahme.

Wie stellt man die (lokale) Umkehrbarkeit sicher?

Wir betrachten eine allgemeine Variablentransformation

$$y_i = y_i(x_1, x_2, x_3) \quad 1 \leq i \leq 3$$

Differentielle Änderungen in x_i müssen eindeutig mit differentiellen Änderungen in y_i zusammenhängen (und umgekehrt). Wir betrachten dazu ein beliebiges skalares

1 Kinematik des Massenpunktes

Feld $\varphi = \varphi(x_1, x_2, x_3)$, das z.B. für eines der y_i steht. Die Abhängigkeit von φ von einem der drei x_i wird durch eine *partielle Ableitung* charakterisiert:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{\varphi(x_1 + \Delta x_1, x_2, x_3) - \varphi(x_1, x_2, x_3)}{\Delta x_1}$$

Bei einer partiellen Ableitung wird nur eine Variable geändert und die anderen bleiben fest. Die partielle Ableitung $\partial\varphi/\partial x_1$ beschreibt also die Änderung von φ parallel zur Koordinatenachse x_1 .

Andere Schreibweisen:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right)_{x_2, x_3} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \Big|_{x_2, x_3} = \partial_{x_1} \varphi = \partial_1 \varphi = \varphi_{x_1} = \varphi_1$$

Beispiel Radius r in Polarkoordinaten

$$\frac{\partial r}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1} \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} = \frac{x_1}{r}$$

Die Rechenregeln für die partiellen Ableitungen sind im wesentlichen gleich zu de-

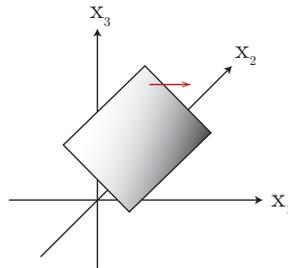


Abbildung 1.38: Veranschaulichung der partiellen Ableitung

nen für normale Ableitungen. Die partielle Ableitung von Vektoren erfolgt wieder komponentenweise.

Beispiel Coulomb- oder Gravitationskraft

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \alpha \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3}, \quad r = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{\frac{1}{2}}$$

1 Kinematik des Massenpunktes

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{\partial F_1}{\partial x_1} &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\alpha \cdot \frac{x_1}{r^3} \right) = \alpha \left(\frac{1}{r^3} - x_1 \frac{\frac{3}{2} \cdot 2 \cdot x_1}{r^5} \right) = \alpha \left(\frac{1}{r^3} - \frac{3x_1^2}{r^5} \right) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\alpha \cdot \frac{x_2}{r^3} \right) = - \frac{3\alpha x_2 x_1}{r^5} \\ \frac{\partial F_3}{\partial x_1} &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\alpha \cdot \frac{x_3}{r^3} \right) = - \frac{3\alpha x_3 x_1}{r^5} \\ \Rightarrow \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_1} &= \frac{\alpha}{r^5} \begin{pmatrix} r^2 - 3x_1^2 \\ -3x_1 x_2 \\ -3x_1 x_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Partielle Ableitung von Vektorprodukten:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) &= \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x_i} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial x_i} \\ \frac{\partial}{\partial x_i} (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) &= \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x_i} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial x_i} \end{aligned}$$

Satz aus der Analysis (ohne Beweis)

Die gemischte partielle Ableitung ist vertauschbar (vorausgesetzt die Funktion ist zweimal stetig partiell differenzierbar):

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}$$

Beispiel $\varphi = x_1^3 x_2$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_1} (x_1^3) = 3x_1^2 = \frac{\partial}{\partial x_2} (3x_1^2 x_2) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2 \partial x_1} \quad \checkmark$$

Bisher haben wir die (x_1, x_2, x_3) nur in eine Richtung geändert. Wir ändern jetzt

(x_1, x_2, x_3) mit Hilfe einer Bahnkurve $\mathbf{r}(t)$, $\Delta x_i = x_i(t + \Delta t) - x_i(t)$.

1 Kinematik des Massenpunktes

⇒ Differentialquotient

$$\begin{aligned}
 D &= \frac{\varphi(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, x_3 + \Delta x_3) - \varphi(x_1, x_2, x_3)}{\Delta t} \\
 &= \frac{1}{\Delta t} [\varphi(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, x_3 + \Delta x_3) - \varphi(x_1, x_2 + \Delta x_2, x_3 + \Delta x_3) \\
 &\quad + \varphi(x_1, x_2 + \Delta x_2, x_3 + \Delta x_3) - \varphi(x_1, x_2, x_3 + \Delta x_3) \\
 &\quad + \varphi(x_1, x_2, x_3 + \Delta x_3) - \varphi(x_1, x_2, x_3)] \\
 &= \frac{1}{\Delta x_1} [\varphi(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, x_3 + \Delta x_3) - \varphi(x_1, x_2 + \Delta x_2, x_3 + \Delta x_3)] \frac{\Delta x_1}{\Delta t} + \\
 &\quad \frac{1}{\Delta x_2} [\varphi(x_1, x_2 + \Delta x_2, x_3 + \Delta x_3) - \varphi(x_1, x_2, x_3 + \Delta x_3)] \frac{\Delta x_2}{\Delta t} + \\
 &\quad \frac{1}{\Delta x_3} [\varphi(x_1, x_2, x_3 + \Delta x_3) - \varphi(x_1, x_2, x_3)] \frac{\Delta x_3}{\Delta t} \\
 &\xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} \quad \text{totale Ableitung von } \varphi \text{ nach } t
 \end{aligned}$$

Vergleiche Kettenregel:

$$\frac{d\varphi(x(t))}{dt} = \frac{d\varphi}{dx} \frac{dx}{dt}$$

⇒ Die totale Ableitung ist eine Verallgemeinerung der Kettenregel. Sie setzt sich additiv aus den Beiträgen der verschiedenen Koordinatenrichtungen zusammen.

Die totale Ableitung kann auch als Skalarprodukt geschrieben werden:

$$\boxed{\frac{d\varphi}{dt} = \sum_{i=1}^3 \frac{d\varphi}{dx_i} \frac{dx_i}{dt} = \nabla \varphi \cdot \dot{\mathbf{r}}}$$

wobei $\nabla \varphi$ Gradient von φ , ∇ Nabla-Symbol

$$\nabla \varphi = \text{grad} \varphi := \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

Die drei Komponenten sind genau die drei partiellen Ableitungen.

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} \quad \text{Differentialoperator}$$

1 Kinematik des Massenpunktes

Wir schreiben jetzt die Änderung von φ so, dass sie unabhängig ist von der Parametrisierung der Raumkurve $\mathbf{r}(t)$:

$$\boxed{d\varphi = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx_i = \nabla \varphi \cdot d\mathbf{r}} \quad \text{totales Differential}$$

$$\Rightarrow (0 = d\varphi = \nabla \varphi \cdot d\mathbf{r} \Leftrightarrow \nabla \varphi \perp d\mathbf{r})$$

Der Gradient steht also senkrecht auf den Flächen mit $\varphi = \text{const.}$ Er zeigt in die Richtung mit der größten Änderung in φ (*bergaufwärts*).

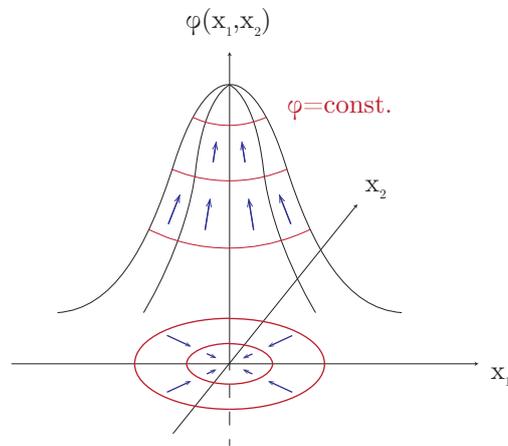


Abbildung 1.39: Gradient zu einer Funktion mit Maximum.

Beispiel Radius r in Polarkoordinaten: $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$

$$\nabla r = \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial x_1} \\ \frac{\partial r}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_1}{r} \\ \frac{x_2}{r} \end{pmatrix} = \frac{\mathbf{r}}{r} = \mathbf{e}_r$$

$$\frac{\partial f(r)}{\partial x_i} = \frac{df}{dr} \frac{\partial r}{\partial x_i} = f'(r) \cdot \frac{x_i}{r}$$

$$\Rightarrow \boxed{\nabla f(r) = f'(r) \cdot \mathbf{e}_r}$$

$$f(r) = r \Rightarrow \nabla f = \mathbf{e}_r \quad \checkmark$$

1 Kinematik des Massenpunktes

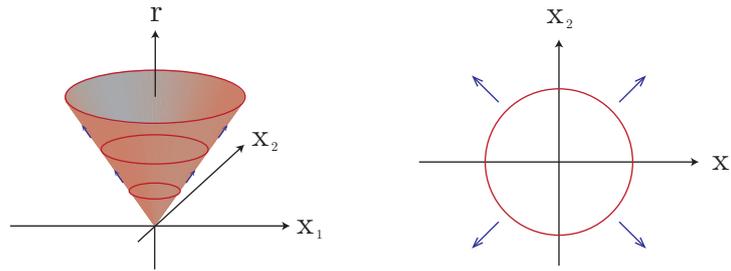


Abbildung 1.40: Gradient für den Radiusbetrag.

Zurück zum ursprünglichen Problem: Wir betrachten eine Koordinatentransformation $y_i \rightarrow x_i$, für die wir die Umrechnungsformeln kennen (z.Bsp. Kugelkoordinaten: $(r, \varphi, \vartheta) \rightarrow (x_1, x_2, x_3) = (r \sin \vartheta \cos \varphi, r \sin \vartheta \sin \varphi, r \cos \vartheta)$).

$$\stackrel{\substack{\text{totales} \\ \text{Diff.}}}{\Rightarrow} dx_i = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial x_i}{\partial y_j} dy_j$$

In Matrix-Schreibweise:

$$\begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} & \frac{\partial x_1}{\partial y_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} & \frac{\partial x_2}{\partial y_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial y_1} & \frac{\partial x_3}{\partial y_2} & \frac{\partial x_3}{\partial y_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dy_1 \\ dy_2 \\ dy_3 \end{pmatrix}$$

Auf der rechten Seite wird eine Matrix mit einem Vektor multipliziert.

Matrixmultiplikation

$$\underline{\underline{A}} = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq r} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mr} \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}}$$

wobei man die Komponente c_{ij} folgendermaßen berechnet:

$$\begin{pmatrix} c_{ij} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ir} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{rj} \end{pmatrix}$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^r a_{ik} b_{kj}$$

1 Kinematik des Massenpunktes

Voraussetzung für die Multiplikation zweier Matrizen ist: Zahl der Spalten in $\underline{\underline{A}} =$ Zahl der Zeilen in $\underline{\underline{B}} = r$. Das gilt also insbesondere, wenn eine $n \times n$ -Matrix mit einem n -Vektor multipliziert wird.

Die Matrix $\underline{\underline{J}}^{(xy)} = \left(\frac{\partial x_i}{\partial y_j}\right)_{1 \leq i, j \leq 3}$ heißt *Funktionalmatrix* oder *Jacobimatrix*. Eine Umkehrung der Transformation $y_i \rightarrow x_i$ ist genau dann möglich, wenn die inverse Matrix $(\underline{\underline{J}}^{(xy)})^{-1}$ existiert.

$$\mathbf{x} = \underline{\underline{A}} \cdot \mathbf{y} \Rightarrow \underline{\underline{A}}^{-1} \mathbf{x} = \mathbf{y} \quad (\underline{\underline{A}} \text{ notwendig quadratisch})$$

Satz zur Umkehrabbildung (ohne Beweis)

$\underline{\underline{A}}^{-1}$ existiert genau dann, wenn $\det \underline{\underline{A}} \neq 0$.

\Rightarrow Eine Koordinatentransformation ist genau dann lokal umkehrbar, wenn die *Funktional-* oder *Jacobideterminante* $J^{(xy)} = \det \underline{\underline{J}}^{(xy)} = \det \left(\frac{\partial x_i}{\partial y_j}\right)_{1 \leq i, j \leq 3} \neq 0$.

Beispiele:

1. **Polarkoordinaten** $(r, \varphi) \rightarrow (x_1, x_2) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$

$$\underline{\underline{J}}^{(xy)} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow J^{(xr)} = \cos \varphi \cdot r \cdot \cos \varphi - \sin \varphi \cdot (-r \sin \varphi) = r$$

\Rightarrow Umkehrung möglich für $r \neq 0$

Dies stimmt auch mit unseren zuvor gewonnenen Erkenntnissen überein:

$$(r = 0, \varphi) \hat{=} (0, 0)$$

2. **Zylinderkoordinaten** $(r, \varphi, z) \rightarrow (x_1, x_2, x_3) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi, z)$

$$\underline{\underline{J}}^{(xr)} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow J^{(xy)} = r$$

Umkehrung möglich wie bei Polarkoordinaten für $r \neq 0$.

3. **Kugelkoordinaten** $(r, \vartheta, \varphi) \rightarrow (x_1, x_2, x_3) = (r \sin \vartheta \cos \varphi, r \sin \vartheta \sin \varphi, r \cos \vartheta)$

$$\underline{\underline{J}}^{(xr)} = \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi & r \cos \vartheta \cos \varphi & -r \sin \vartheta \sin \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi & r \cos \vartheta \sin \varphi & r \sin \vartheta \cos \varphi \\ \cos \vartheta & -r \sin \vartheta & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow J^{(xr)} = r^2 \sin \vartheta$$

Umkehrung möglich ausser für $r = 0$ oder $\vartheta = 0, \pi$ (Nord- oder Südpol). Das sind genau die Fälle, bei denen φ aufgrund der Rotationssymmetrie um die z -Achse nicht eindeutig ist.

Verkettung von Koordinatentransformationen

$$\begin{aligned}
 z_i &\longrightarrow y_i \longrightarrow x_i \\
 \Rightarrow x_i &= x_i(y_1(z_1, z_2, z_3), y_2(z_1, z_2, z_3), y_3(z_1, z_2, z_3)) \\
 \Rightarrow \frac{\partial x_i}{\partial z_j} &= \sum_{k=1}^3 \frac{\partial x_i}{\partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial z_j} \\
 \Rightarrow \underline{\underline{J}}^{(xz)} &= \underline{\underline{J}}^{(xy)} \cdot \underline{\underline{J}}^{(yz)} \\
 \Rightarrow \det \underline{\underline{J}}^{(xz)} &= J^{(xz)} = \det \underline{\underline{J}}^{(xy)} \det \underline{\underline{J}}^{(yz)} = J^{(xy)} J^{(yz)}
 \end{aligned}$$

Die Gesamttransformation ist eindeutig ($J^{(xz)} \neq 0$), wenn die Einzeltransformationen eindeutig sind ($J^{(yz)}, J^{(xy)} \neq 0$).

Spezialfall: $x_i = z_i$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow J^{(xx)} &= 1 \\
 \Rightarrow J^{(xy)} &= \frac{1}{J^{(yx)}}
 \end{aligned}$$

\Rightarrow Wenn die Hintransformation eindeutig ist, dann ist es auch die Rücktransformation.

Die Jacobi-Determinante hat eine wichtige geometrische Bedeutung. Wir betrachten die *lokalen* Eigenschaften von Koordinatensystemen mit Hilfe von Bahnkurven und Dreibeinen.

Koordinatenlinie = Bahnkurve, die entsteht, wenn nur eine Variable y_i variiert wird.

An jedem Ort im Raum definiert das Koordinatensystem also ein lokales Dreibein. Dieses wird aufgespannt von den drei Einheitsvektoren:

$$\mathbf{e}_{y_i} = \frac{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y_i}}{\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y_i} \right|} = \frac{1}{b_{y_i}} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y_i} \text{ mit } b_{y_i} := \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y_i} \right|$$

Beispiele

1. Polarkoordinaten (r, φ)

$$\begin{aligned}
 b_r &= 1, \quad \mathbf{e}_r = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} \\
 b_\varphi &= r, \quad \mathbf{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

1 Kinematik des Massenpunktes

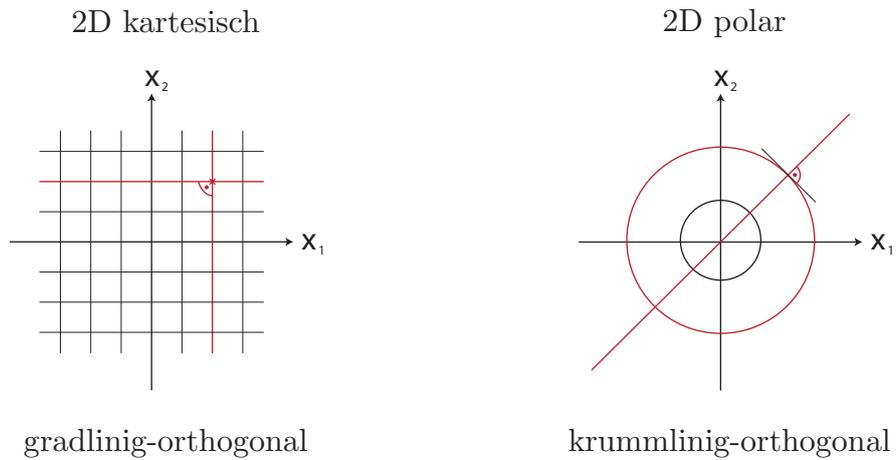


Abbildung 1.41: Beispiele von Koordinatenlinien

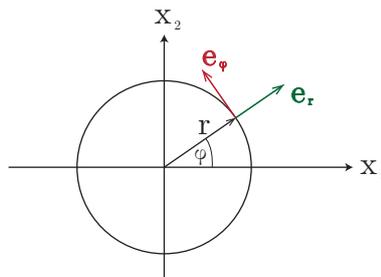


Abbildung 1.42: Basisvektoren bei Polarkoordinaten

2. Zylinderkoordinaten (r, φ, z)

r, φ wie bei Polarkoordinaten

$$b_z = 1, \quad \mathbf{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3. Kugelkoordinaten (r, ϑ, φ)

$$b_r = 1, \quad \mathbf{e}_r = \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi \\ \cos \vartheta \end{pmatrix}$$

1 Kinematik des Massenpunktes

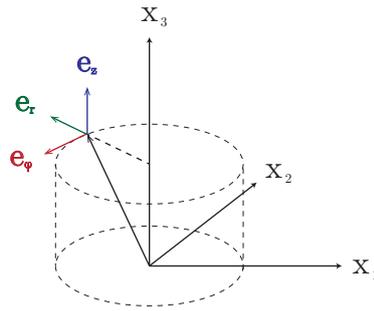


Abbildung 1.43: Basisvektoren bei Zylinderkoordinaten

$$b_\vartheta = r, \quad \mathbf{e}_\vartheta = \begin{pmatrix} \cos \vartheta \cos \varphi \\ \cos \vartheta \sin \varphi \\ -\sin \vartheta \end{pmatrix}$$

$$b_\varphi = r \sin \vartheta, \quad \mathbf{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

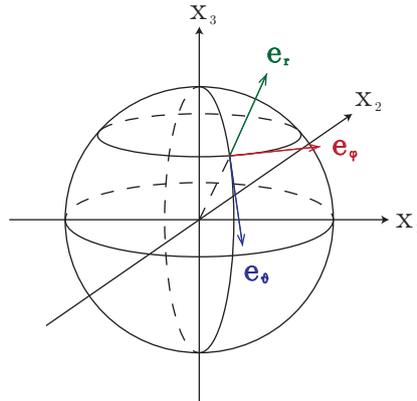


Abbildung 1.44: Basisvektoren bei Kugelkoordinaten

In allen drei Fällen gilt $\mathbf{e}_{y_i} \cdot \mathbf{e}_{y_j} = \delta_{ij}$ (Orthonormalsysteme).
Das lokale Dreibein definiert ein lokales Volumenelement: Wir berechnen das Volumen des Parallelepipeds, das von

$$\mathbf{a}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y_i} dy_i = b_{y_i} \mathbf{e}_{y_i} dy_i$$

1 Kinematik des Massenpunktes

aufgespannt wird.

$$\begin{aligned}\Rightarrow dV &= \mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3) \\ &= \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} dy_1 & \frac{\partial x_2}{\partial y_1} dy_1 & \frac{\partial x_3}{\partial y_1} dy_1 \\ \frac{\partial x_1}{\partial y_2} dy_2 & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} dy_2 & \frac{\partial x_3}{\partial y_2} dy_2 \\ \frac{\partial x_1}{\partial y_3} dy_3 & \frac{\partial x_2}{\partial y_3} dy_3 & \frac{\partial x_3}{\partial y_3} dy_3 \end{pmatrix} = J dy_1 dy_2 dy_3 \\ &= b_{y_1} b_{y_2} b_{y_3} \mathbf{e}_{y_1} \cdot (\mathbf{e}_{y_2} \times \mathbf{e}_{y_3}) dy_1 dy_2 dy_3 = b_{y_1} b_{y_2} b_{y_3} dy_1 dy_2 dy_3\end{aligned}$$

Bemerkung: skalare Faktoren können zeilenweise aus der Determinante rausgezogen werden und das Spatprodukt eines ONS ist gleich 1.

\Rightarrow Die Jacobi- Determinante beschreibt die Änderung im Volumenelement bei einer Koordinatentransformation. Sie hängt mit den b_{y_i} über die einfache Beziehung $J = b_{y_1} b_{y_2} b_{y_3}$ zusammen.

Beispiele

1. Polarkoordinaten

In zwei Dimensionen haben wir kein Volumen-, sondern ein Flächenelement:

$$dA = dr d\varphi r$$

Damit ergibt sich für die Kreisfläche A :

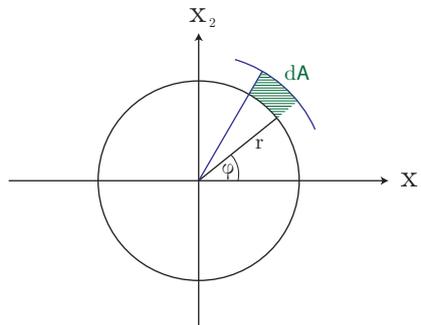


Abbildung 1.45: Flächenelement in Polarkoordinaten

$$A = \int_0^R dr \int_0^{2\pi} d\varphi r = \left(\int_0^R r dr \right) \left(\int_0^{2\pi} d\varphi \right) = \frac{1}{2} R^2 2\pi = \pi R^2$$

2. Zylinderkoordinaten

$$dV = r dr d\varphi dz$$

1 Kinematik des Massenpunktes

Damit ergibt sich für das Zylindervolumen V :

$$V = \left(\int_0^R r dr \right) \left(\int_0^{2\pi} d\varphi \right) \left(\int_0^L dz \right) = \frac{1}{2} R^2 2\pi L = \pi R^2 L$$

3. Kugelkoordinaten

$$dV = dr d\vartheta d\varphi r^2 \sin \vartheta$$

Damit ergibt sich für das Kugelvolumen V :

$$V = \left(\int_0^R r^2 dr \right) \left(\int_0^\pi \sin \vartheta d\vartheta \right) \left(\int_0^{2\pi} d\varphi \right) = \frac{1}{3} R^3 2\pi \left(\int_{-1}^1 d(\cos \vartheta) \right) = \frac{4}{3} \pi R^3$$

Symmetrische Teile dieser Volumina können jetzt einfach durch entsprechende Einschränkung der Integralgrenzen berechnet werden.

Differentiale und Differentialoperatoren können in krummlinige Koordinatensysteme umgeschrieben werden.

Differential des Ortsvektors:

$$d\mathbf{r} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y_i} dy_i = \sum_{i=1}^3 b_{y_i} dy_i \mathbf{e}_{y_i}$$

$$\text{Polarkoordinaten: } d\mathbf{r} = dr \mathbf{e}_r + r d\varphi \mathbf{e}_\varphi$$

$$\text{Zylinderkoordinaten: } d\mathbf{r} = dr \mathbf{e}_r + r d\varphi \mathbf{e}_\varphi + dz \mathbf{e}_z$$

$$\text{Kugelkoordinaten: } d\mathbf{r} = dr \mathbf{e}_r + r d\vartheta \mathbf{e}_\vartheta + r \sin \vartheta d\varphi \mathbf{e}_\varphi$$

Wie schreibt sich der Gradient

$$\nabla \varphi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

in krummlinig-orthogonalen Koordinaten?

$$\nabla \varphi = \sum_{i=1}^3 (\nabla \varphi)_{y_i} \mathbf{e}_{y_i}$$

$$\Rightarrow (\nabla \varphi)_{y_i} = \mathbf{e}_{y_i} \cdot \nabla \varphi = \frac{1}{b_{y_i}} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y_i} \cdot \nabla \varphi = \frac{1}{b_{y_i}} \left(\frac{\partial x_1}{\partial y_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \frac{\partial x_2}{\partial y_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \frac{\partial x_3}{\partial y_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \right)$$

$$= \boxed{\frac{1}{b_{y_i}} \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} = (\nabla \varphi)_{y_i}}$$

1 Kinematik des Massenpunktes

$$\Rightarrow \nabla = \sum_{i=1}^3 \mathbf{e}_{y_i} \frac{1}{b_{y_i}} \frac{\partial}{\partial y_i}$$

Beispiel Kugelkoordinaten

$$\nabla = \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\vartheta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

Falls $\varphi = \varphi(r)$ kugelsymmetrisch \Rightarrow Winkelanteile fallen weg

Anwendung

$$\varphi = r \quad \Rightarrow \quad \nabla r = \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} r = \mathbf{e}_r$$

Zum Vergleich: kartesisch

$$\nabla r = \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial x_1} \\ \frac{\partial r}{\partial x_2} \\ \frac{\partial r}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{e}_r \quad \checkmark$$

Bisher haben wir ∇ auf skalare Felder angewendet. ∇ kann aber auch auf Vektorfelder angewandt werden.

Begriffserklärung

Skalarfeld: ein Skalar, der vom Ort abhängt, $\varphi = \varphi(\mathbf{r})$ (Beispiel: Temperatur)

Vektorfeld: ein Vektor, der vom Ort abhängt, $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{r})$ (Beispiel: Strömungsfeld)

$$\mathbf{v} = \mathbf{e}_z v_0 \left(\frac{R^2 - r^2}{R^2} \right) \leftarrow \text{parabolisches Flussprofil}$$

keine φ -Abhängigkeit wegen Zylindersymmetrie, z tritt nur über den Einheitsvektor auf, die einzige wirklich relevante Koordinate ist die Radialkoordinate r .

Andere physikalische Beispiele für Vektorfelder

1. Gravitationsfeld $\mathbf{F}_G(\mathbf{r})$
2. elektrisches Feld um eine Ladung $\mathbf{E}(\mathbf{r})$
3. Strömungsfeld mit Verengung $\mathbf{v}(\mathbf{r})$

1 Kinematik des Massenpunktes

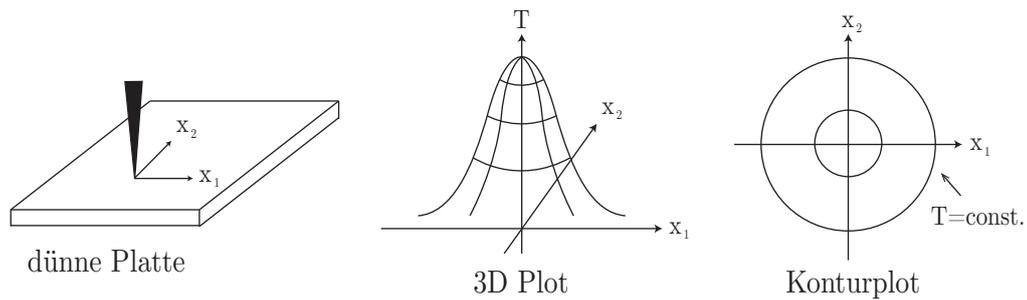


Abbildung 1.46: Skalarfeld am Beispiel Temperatur: eine dünne Platte wird in der Mitte geheizt, das Temperaturfeld ist deshalb zweidimensional und hat eine radialsymmetrische Glockenform. Diese kann entweder durch einen 3D-Plot oder einen Konturplot dargestellt werden.

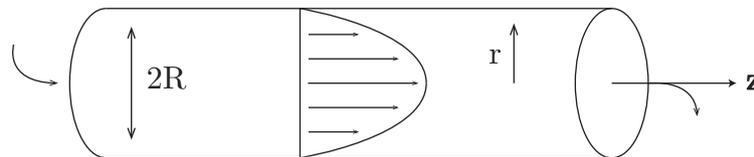


Abbildung 1.47: Die parabolische Rohrströmung ist ein einfaches und wichtiges Beispiel für ein Vektorfeld.

Es gibt zwei fundamental verschiedene Möglichkeiten, den Gradienten auf ein Vektorfeld anzuwenden, die genau Skalar- und Vektorprodukt entsprechen:

1. Divergenz

$$\operatorname{div} \mathbf{a}(\mathbf{r}) = \nabla \cdot \mathbf{a}(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} a_i(\mathbf{r}) = \frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} + \frac{\partial a_3}{\partial x_3}$$

2. Rotation

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{a}(\mathbf{r}) &= \nabla \times \mathbf{a}(\mathbf{r}) = \sum_{i,j,k} \varepsilon_{ijk} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} a_j \right) \mathbf{e}_k \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x_2} a_3 - \frac{\partial}{\partial x_3} a_2 \right) \mathbf{e}_1 + \left(\frac{\partial}{\partial x_3} a_1 - \frac{\partial}{\partial x_1} a_3 \right) \mathbf{e}_2 + \left(\frac{\partial}{\partial x_1} a_2 - \frac{\partial}{\partial x_2} a_1 \right) \mathbf{e}_3 \\ &= \det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

1 Kinematik des Massenpunktes

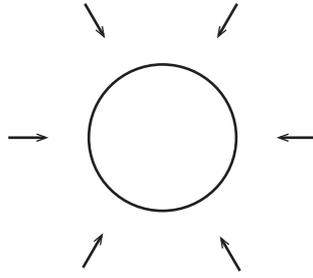


Abbildung 1.48: Gravitationsfeld

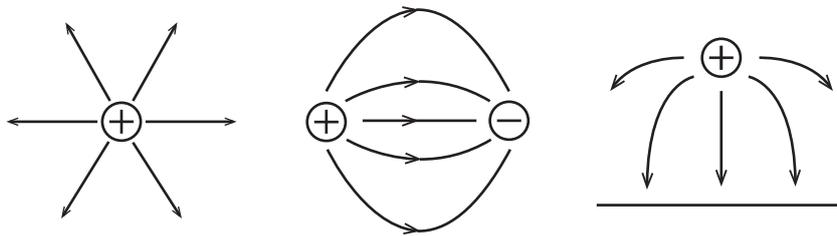


Abbildung 1.49: elektrisches Feld um eine Ladung

Physikalische Interpretation: Divergenz beschreibt die *Quellen* des Vektorfelds. Rotation beschreibt den Grad der *Verwirbelung*. Für ein gegebenes Vektorfeld \mathbf{a} nennt man

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \nabla \cdot \mathbf{a} \quad \text{Quellenfeld von } \mathbf{a}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = \nabla \times \mathbf{a} \quad \text{Wirbelfeld von } \mathbf{a}$$

Besondere Typen von Vektorfeldern sind

$$\text{Gradientenvektorfeld: } \mathbf{g} = \nabla \varphi \quad \varphi \text{ Potential}$$

$$\text{Wirbelvektorfeld: } \mathbf{w} = \nabla \times \mathbf{a} \quad \mathbf{a} \text{ Vektorpotential}$$

Rechenregeln für die Divergenz

$$\nabla \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \nabla \cdot \mathbf{a} + \nabla \cdot \mathbf{b}$$

$$\nabla \cdot (\alpha \mathbf{a}) = \alpha \nabla \cdot \mathbf{a}$$

$$\nabla \cdot (\varphi \mathbf{a}) = \nabla \varphi \cdot \mathbf{a} + \varphi \nabla \cdot \mathbf{a}$$

Beispiele

1 Kinematik des Massenpunktes

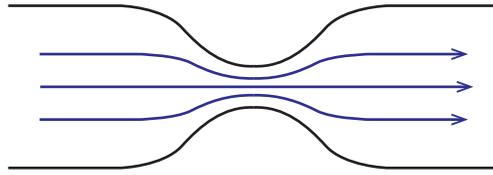


Abbildung 1.50: Strömungsfeld mit Verengung

1. $\mathbf{a}(\mathbf{r}) = \alpha$

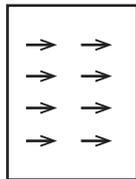
$$\Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{a} = 0$$

2. $\mathbf{a} = \alpha \mathbf{r}$

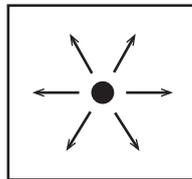
$$\Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{a} = \alpha \left(\frac{\partial x_1}{\partial x_1} + \frac{\partial x_2}{\partial x_2} + \frac{\partial x_3}{\partial x_3} \right) = 3\alpha$$

3. $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{\alpha \mathbf{r}}{r^3}$ Coulomb oder Gravitationskraft

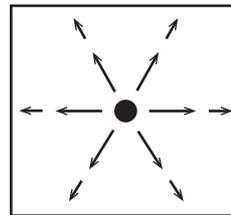
$$\Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \frac{\partial F_3}{\partial x_3} = \frac{\alpha}{r^5} (3r^2 - 3x_1^2 - 3x_2^2 - 3x_3^2) = 0 \quad \text{für } r \neq 0$$



Beispiel 1



Beispiel 2



Beispiel 3

Abbildung 1.51: Veranschaulichung zu den Beispielen

Physikalische Bedeutung der Divergenz

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \nabla \cdot \mathbf{a} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial a_i}{\partial x_i}$$

1 Kinematik des Massenpunktes

Durchfluss eines Feldes durch ein Volumen ΔV um den Punkt (x_1, x_2, x_3) :

$$D(x_1, x_2, x_3) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\text{Fluss}}{\Delta V}$$

Betrachte Flüssigkeit mit Strömungsfeld $\mathbf{v}(x_1, x_2, x_3)$ und Dichte $\rho(x_1, x_2, x_3)$.

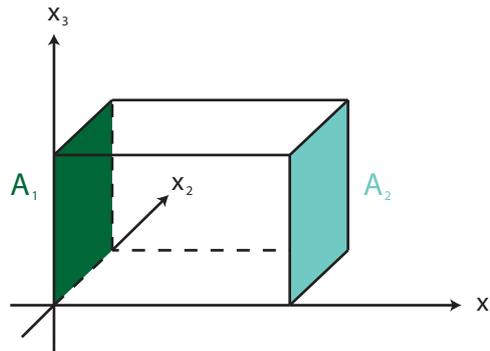


Abbildung 1.52: Durchfluss eines Feldes durch ein Volumen

$$dV = dx_1 dx_2 dx_3$$

$$\# \text{ Teilchen} = \rho dV$$

Betrachte x-Richtung: Fluss von links nach rechts.

Reinstrom durch A_1 :

$$\rho(x_1, x_2, x_3) \frac{dx_1 dx_2 dx_3}{dt} = \rho v_{x_1} dx_2 dx_3$$

Rausstrom durch A_2 :

$$\rho(x_1 + dx_1, x_2, x_3) \frac{dx_1 dx_2 dx_3}{dt} \stackrel{\substack{\text{lineare} \\ \text{Naehierung}}}{=} \left(\rho(x_1, x_2, x_3) v_{x_1} + \frac{\partial(\rho v_{x_1})}{\partial x_1} dx_1 \right) dx_2 dx_3$$

Bilanz in x-Richtung:

$$\text{Rausstrom} - \text{Reinstrom} = \frac{\partial(\rho v_{x_1})}{\partial x_1} dV$$

Gesamtbilanz:

$$\left[\frac{\partial(\rho v_{x_1})}{\partial x_1} + \frac{\partial(\rho v_{x_2})}{\partial x_2} + \frac{\partial(\rho v_{x_3})}{\partial x_3} \right] dV \Rightarrow \boxed{D = \nabla \cdot (\rho \mathbf{v})}$$

1 Kinematik des Massenpunktes

Hierbei ist $\rho \mathbf{v}$ die Impulsstromdichte. Allgemein folgt also, dass die Divergenz den Durchfluss eines Vektorfeldes durch den Ort \mathbf{r} beschreibt, wobei im speziellen Fall von Strömungsfeldern die Impulsstromdichte relevant ist.

$$\nabla \cdot \mathbf{a} > 0 \quad \text{Quelle}, \quad \nabla \cdot \mathbf{a} < 0 \quad \text{Senke},$$

Solange es keine Quellen oder Senken gibt, werden die Strömungsfelder divergenzfrei sein. Für die Rohrströmung z.B. kann dies leicht nachgeprüft werden.

Höhere Ableitungen

Der Gradient kann auch verwendet werden, um höhere Ableitungen von Skalar- und Vektorfeldern zu definieren, zum Beispiel:

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{a}), \quad \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{a}), \quad \text{etc.}$$

Besonders wichtig ist die Divergenz eines Gradientenfeldes:

$$\text{div grad } \varphi = \nabla \cdot (\nabla \varphi) =: \Delta \varphi$$

Δ Laplace-Operator = symmetrische zweite Ableitung in drei Dimensionen

$$\Delta \varphi = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3^2}$$

Divergenz in krummlinigen Koordinaten

$$\mathbf{a} = \sum_{i=1}^3 a_{y_i} \mathbf{e}_{y_i}$$

Sowohl \mathbf{a}_{y_i} als auch \mathbf{e}_{y_i} sind Funktionen von y_i .

$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{div } \mathbf{a} &= \nabla \cdot \mathbf{a} = \left(\sum_{i=1}^3 \mathbf{e}_{y_i} \frac{1}{b_{y_i}} \frac{\partial}{\partial y_i} \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^3 a_{y_j} \mathbf{e}_{y_j} \right) \\ &= \sum_{i,j} \frac{1}{b_{y_i}} (\mathbf{e}_{y_i} \cdot \mathbf{e}_{y_j}) \frac{\partial a_{y_j}}{\partial y_i} + \sum_{i,j} \frac{a_{y_j}}{b_{y_i}} (\mathbf{e}_{y_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_{y_j}}{\partial y_i}) \end{aligned}$$

Das Skalarprodukt im zweiten Term wird über einen Umweg ausgerechnet:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial y_i \partial y_j} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial y_j \partial y_i}$$

1 Kinematik des Massenpunktes

$$\begin{aligned}
 &\Rightarrow \frac{\partial}{\partial y_i}(b_{y_j} \mathbf{e}_{y_j}) = \frac{\partial}{\partial y_j}(b_{y_i} \mathbf{e}_{y_i}) \\
 &\Rightarrow b_{y_j} \frac{\partial \mathbf{e}_{y_j}}{\partial y_i} + \frac{\partial b_{y_j}}{\partial y_i} \mathbf{e}_{y_j} = b_{y_i} \frac{\partial \mathbf{e}_{y_i}}{\partial y_j} + \frac{\partial b_{y_i}}{\partial y_j} \mathbf{e}_{y_i} \\
 \xrightarrow{\mathbf{e}_{y_i} \cdot} & b_{y_j} (\mathbf{e}_{y_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_{y_j}}{\partial y_i}) + \frac{\partial b_{y_j}}{\partial y_i} (\mathbf{e}_{y_i} \cdot \mathbf{e}_{y_j}) = b_{y_i} (\mathbf{e}_{y_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_{y_i}}{\partial y_j}) + \frac{\partial b_{y_i}}{\partial y_j} (\mathbf{e}_{y_i} \cdot \mathbf{e}_{y_i})
 \end{aligned}$$

Der erste Term auf der linken Seite ist gesucht, nach ihm wollen wir auflösen. Das Skalarprodukt im zweiten Term auf der linken Seite gibt ein Kronecker-Delta. Der erste Term auf der rechten Seite fällt weg, da \mathbf{e}_{y_i} ein Einheitsvektor ist. Das Skalarprodukt im zweiten Term auf der rechten Seite gibt 1. Damit finden wir:

$$\mathbf{e}_{y_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_{y_j}}{\partial y_i} = \frac{1}{b_{y_j}} \left(\frac{\partial b_{y_i}}{\partial y_j} - \frac{\partial b_{y_j}}{\partial y_i} \delta_{ij} \right) = \begin{cases} 0 & \text{für } i = j \\ \frac{1}{b_{y_j}} \frac{\partial b_{y_i}}{\partial y_j} & \text{für } i \neq j \end{cases}$$

Mit diesem Zwischenergebnis gilt also, dass das gesuchte Endergebnis neun verschiedene Terme hat:

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot \mathbf{a} &= \sum_{i=1}^3 \frac{1}{b_{y_i}} \frac{\partial a_{y_i}}{\partial y_i} + \sum_{i,j}^{i \neq j} \frac{a_{y_j}}{b_{y_i} b_{y_j}} \frac{\partial b_{y_i}}{\partial y_j} \\
 &= \frac{1}{b_{y_1} b_{y_2} b_{y_3}} \left[\frac{\partial}{\partial y_1} (b_{y_2} b_{y_3} a_{y_1}) + \frac{\partial}{\partial y_2} (b_{y_3} b_{y_1} a_{y_2}) + \frac{\partial}{\partial y_3} (b_{y_1} b_{y_2} a_{y_3}) \right]
 \end{aligned}$$

Die Divergenz in krummlinig-orthogonalen Koordinaten ist also eine komplizierte, aber hochsymmetrische Kombination der Ableitungen der b_{y_i} und a_{y_i} .

Gradient in Divergenz einsetzen:

$$a_{y_i} = \frac{1}{b_{y_i}} \frac{\partial \varphi}{\partial y_i}$$

$$\Rightarrow \boxed{\nabla^2 \varphi = \Delta \varphi = \frac{1}{b_{y_1} b_{y_2} b_{y_3}} \left[\frac{\partial}{\partial y_1} \left(\frac{b_{y_2} b_{y_3}}{b_{y_1}} \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} \right) + \frac{\partial}{\partial y_2} \left(\frac{b_{y_3} b_{y_1}}{b_{y_2}} \frac{\partial \varphi}{\partial y_2} \right) + \frac{\partial}{\partial y_3} \left(\frac{b_{y_1} b_{y_2}}{b_{y_3}} \frac{\partial \varphi}{\partial y_3} \right) \right]}$$

Beispiele

1. Zylinderkoordinaten

$$b_r = 1, \quad b_\varphi = r \quad b_z = 1$$

1 Kinematik des Massenpunktes

$$\begin{aligned}\Rightarrow \Delta\phi &= \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial\phi}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial\varphi} \frac{1}{r} \frac{\partial\phi}{\partial\varphi} + \frac{\partial}{\partial z} r \frac{\partial\phi}{\partial z} \right] \\ &= \frac{1}{r} \left[\frac{\partial\phi}{\partial r} + r \frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2} + r \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} \right]\end{aligned}$$

$$\text{Radialanteil: } \frac{1}{r} \frac{\partial\phi}{\partial r} + \frac{\partial^2\phi}{\partial r^2}$$

2. Kugelkoordinaten

$$b_r = 1, \quad b_\vartheta = r, \quad b_\varphi = r \sin\vartheta$$

$$\Rightarrow \Delta\phi = \frac{1}{r^2 \sin\vartheta} \left[\frac{\partial}{\partial r} r^2 \sin\vartheta \frac{\partial\phi}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial\vartheta} \sin\vartheta \frac{\partial\phi}{\partial\vartheta} + \frac{\partial}{\partial\varphi} \frac{1}{\sin\vartheta} \frac{\partial\phi}{\partial\varphi} \right]$$

$$\text{Radialanteil: } \frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial\phi}{\partial r}$$

Anwendung: Laplace in Kugelkoordinaten

$$(1) \phi = r \quad \Rightarrow \Delta\phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} r = \frac{2}{r}$$

$$(2) \phi = \frac{1}{r} \quad \Rightarrow \Delta\phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} = 0 \quad \text{für } r \neq 0$$

$$\begin{aligned}(3) \phi = \frac{e^{-\alpha r}}{r} \quad \Rightarrow \Delta\phi &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} \phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \left(\frac{e^{-\alpha r}(-\alpha)r - e^{-\alpha r}}{r^2} \right) \\ &= -\frac{1}{r^2} (e^{-\alpha r}(-\alpha)(1 + \alpha r) + e^{-\alpha r}(\alpha)) = \alpha^2 \frac{e^{-\alpha r}}{r} \\ &= \alpha^2 \phi\end{aligned}$$

In (2) handelt es sich um das Coulomb- bzw. Gravitationspotential und in (3)

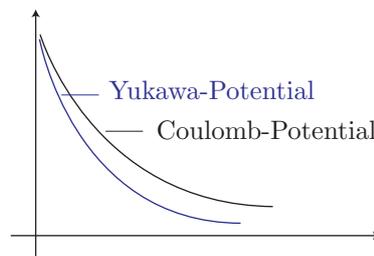


Abbildung 1.53: Yukawa- und Coulombpotential

um das Yukawa-Potential, das z.B. in der Elektrostatik und in der Kernphysik vorkommt. Mit diesen Rechnungen haben wir auch Lösungen für Differentialgleichungen wie $\Delta\phi = 0$ (für $r \neq 0$) und $\Delta\phi = \alpha^2\phi$ gefunden.

1.7 Geschwindigkeit und Beschleunigung in krummlinigen Koordinaten

Im allgemeinen Fall gilt:

$$\mathbf{v}(t) = \sum_{i=1}^3 v_{y_i} \mathbf{e}_{y_i}$$

$$\mathbf{a}(t) = \sum_{i=1}^3 a_{y_i} \mathbf{e}_{y_i}$$

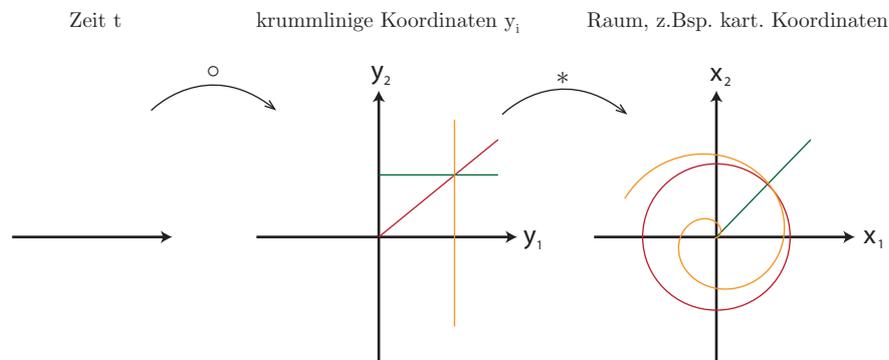


Abbildung 1.54: Wir betrachten jetzt die Verknüpfung von zwei Abbildungen: von der Zeit geht es über die krummlinigen Koordinaten in den kartesischen Raum.

Wie rechnen wir v_{y_i} und a_{y_i} aus?

Totales Differential des Ortsvektors

$$d\mathbf{r} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y_i} dy_i = \sum_{i=1}^3 b_{y_i} \mathbf{e}_{y_i} dy_i$$

$$\Rightarrow \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \sum_{i=1}^3 \underbrace{b_{y_i} \mathbf{e}_{y_i}}_* \underbrace{\dot{y}_i}_\circ$$

$$\Rightarrow \boxed{v_{y_i} = b_{y_i} \dot{y}_i}$$

Die a_{y_i} müssen für die gewünschten Koordinatensysteme explizit ausgerechnet werden.

Beispiele

1. Polarkoordinaten

$$b_r = 1, \quad b_\varphi = r$$

$$\Rightarrow v_r = \dot{r}, \quad v_\varphi = r \dot{\varphi}$$

$$\Rightarrow \mathbf{v} = \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi$$

Außerdem:

$$\mathbf{r} = r \mathbf{e}_r \Rightarrow \dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{v}} = \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\mathbf{e}}_r$$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{\mathbf{e}}_r = \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi}$$

Erinnerung: Einheitsvektor $\mathbf{e}^2 = 1 \Rightarrow \mathbf{e} \cdot \dot{\mathbf{e}} = 0 \Rightarrow \dot{\mathbf{e}} \perp \mathbf{e}$

Allgemein:

$$\mathbf{e}_{y_i} \cdot \mathbf{e}_{y_j} = \delta_{ij} \Rightarrow \dot{\mathbf{e}}_{y_i} \cdot \mathbf{e}_{y_j} + \mathbf{e}_{y_i} \cdot \dot{\mathbf{e}}_{y_j} = 0$$

$$\Rightarrow \dot{\mathbf{e}}_{y_i} \cdot \mathbf{e}_{y_j} = -\mathbf{e}_{y_i} \cdot \dot{\mathbf{e}}_{y_j}$$

$$i = j \Rightarrow \dot{\mathbf{e}}_{y_i} \cdot \mathbf{e}_{y_i} = -\mathbf{e}_{y_i} \cdot \dot{\mathbf{e}}_{y_i} = -\dot{\mathbf{e}}_{y_i} \cdot \mathbf{e}_{y_i} \Rightarrow \dot{\mathbf{e}}_{y_i} \cdot \mathbf{e}_{y_i} = 0$$

Wir wissen: $\dot{\mathbf{e}}_\varphi$ muss senkrecht auf \mathbf{e}_φ stehen

$$\Rightarrow \dot{\mathbf{e}}_\varphi = \alpha \cdot \mathbf{e}_r$$

$$\Rightarrow \alpha = \mathbf{e}_r \cdot \dot{\mathbf{e}}_\varphi = -\dot{\mathbf{e}}_r \cdot \mathbf{e}_\varphi = -\dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi \cdot \mathbf{e}_\varphi = -\dot{\varphi}$$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{\mathbf{e}}_\varphi = -\dot{\varphi} \mathbf{e}_r}$$

$$\Rightarrow \mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{r} \mathbf{e}_r + \dot{r} \dot{\mathbf{e}}_r + (\dot{r} \dot{\varphi} + r \ddot{\varphi}) \mathbf{e}_r + r \dot{\varphi} \dot{\mathbf{e}}_\varphi$$

Mit $\mathbf{e}_r = \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi$ und $\dot{\mathbf{e}}_\varphi = -\dot{\varphi} \mathbf{e}_r$ ergibt sich:

$$\Rightarrow \mathbf{a} = \mathbf{e}_r (\ddot{r} - r \dot{\varphi}^2) + \mathbf{e}_\varphi (2\dot{r} \dot{\varphi} + r \ddot{\varphi})$$

$$\Rightarrow \boxed{a_r = \ddot{r} - r \dot{\varphi}^2, \quad a_\varphi = 2\dot{r} \dot{\varphi} + r \ddot{\varphi}}$$

Anwendung

1 Kinematik des Massenpunktes

a) gleichförmige Kreisbewegung

$$r = R = \text{const.}, \varphi = \omega t, \dot{\varphi} = \omega$$

$$\Rightarrow v_r = 0, v_\varphi = R\omega, v = \sqrt{\mathbf{v}^2} = \sqrt{v_r^2 + v_\varphi^2} = R\omega$$

$$a_r = -R\omega^2, a_\varphi = 0, a = \sqrt{a_r^2 + a_\varphi^2} = R\omega^2 \quad \text{Zentrifugalbeschl.}$$

b) nichtgleichförmige Kreisbewegung $r = R = \text{const.}, \ddot{\varphi} \neq 0$

$$\Rightarrow a_\varphi = R\ddot{\varphi} \Rightarrow a = R\sqrt{\dot{\varphi}^4 + \ddot{\varphi}^2}$$

$$\text{Dimensionen: } [a] = \frac{L}{T^2}$$

c) Spiralbewegung $\dot{\varphi} = \omega = \text{const.}, r = c \cdot t$

$$\Rightarrow v_r = c, v_\varphi = ct\omega$$

$$a_r = -ct\omega^2, a_\varphi = 2c\omega$$

2. Zylinderkoordinaten

$$b_r = 1, b_\varphi = r, b_z = 1$$

$$\Rightarrow v_r = \dot{r}, v_\varphi = r\dot{\varphi}, v_z = \dot{z}$$

Rechnung zeigt:

$$\dot{\mathbf{e}}_z = 0, \dot{\mathbf{e}}_r = \dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi, \dot{\mathbf{e}}_\varphi = -\dot{\varphi}\mathbf{e}_r$$

→ wie bei Polarkoordinaten

→ 2D Beschleunigung gleich wie oben, ausserdem $a_z = \ddot{z}$

3. Kugelkoordinaten

$$b_r = 1, b_\vartheta = r, b_\varphi = r \sin \vartheta$$

$$v_r = \dot{r}, v_\vartheta = r\dot{\vartheta}, v_\varphi = r \sin \vartheta \dot{\varphi}$$

Ergebnis für die $\dot{\mathbf{e}}_{y_i}$:

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{e}}_r \\ \dot{\mathbf{e}}_\vartheta \\ \dot{\mathbf{e}}_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \dot{\vartheta} & \sin \vartheta \dot{\varphi} \\ -\dot{\vartheta} & 0 & \cos \vartheta \dot{\varphi} \\ -\sin \vartheta \dot{\varphi} & -\cos \vartheta \dot{\varphi} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_r \\ \mathbf{e}_\vartheta \\ \mathbf{e}_\varphi \end{pmatrix}$$

Ergebnis für die Beschleunigung:

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\vartheta}^2 - r \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2$$

$$a_\vartheta = r\ddot{\vartheta} + 2\dot{r}\dot{\vartheta} - r \sin \vartheta \cos \vartheta \dot{\varphi}^2$$

$$a_\varphi = r \sin \vartheta \ddot{\varphi} + 2 \sin \vartheta \dot{r} \dot{\varphi} + 2r \cos \vartheta \dot{\vartheta} \dot{\varphi}$$

2 Dynamik des Massenpunktes

2.1 Die Newtonsche Gesetze

Die Dynamik befasst sich mit Kräften als Ursache der Bewegung. Die Rolle der Kräfte wird durch die drei Newtonsche Gesetze beschrieben. Formal handelt es sich dabei um ein Axiomensystem, dessen Aussagen innerhalb der Theorie nicht weiter begründet werden (das historische Vorbild von Newton waren die *Elemente* von Euklid). In der Newtonschen Mechanik geht es darum, die Konsequenzen dieser drei Gesetze herzuleiten. Der letzte Massstab ist dabei wie immer in der Physik das Experiment.

1. Lex Prima, Trägheitsgesetz

Jeder Körper verharrt im Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen Bewegung, wenn er nicht durch Kräfte gezwungen wird, seinen Zustand zu ändern.

Bemerkungen: Wichtig ist, dass die *Bewegungsänderung*, nicht die Bewegung selbst einer Kraft bedarf. Das 1. Gesetz definiert zwei Referenzzustände

- a) gleichförmige Bewegung für Körper
- b) Inertialsystem für Bezugssystem

Ein auf der Erde ruhendes Labor ist für viele Zwecke ein geeignetes Inertialsystem, ansonsten denken wir an den Fixsternhimmel als geeignetes Inertialsystem.

Ein Zustand gleichförmiger Bewegung ist experimentell schwer zu realisieren.

→ *Dreckeffekte* eliminieren (z.Bsp. Reibung, Scheinkräfte)

→ historische Leistung von Galileo Galilei, er hat damit das Aristotelische System überwunden, in dem Ruhe der Referenzzustand war und jede Bewegung eine Kraft voraussetze.

2. Lex Seconda, Bewegungsgesetz

Die Änderung der Bewegung ist der Einwirkung der bewegenden Kraft proportional und erfolgt in deren Richtung.

Bemerkungen: Die Kraft ist also ein Vektor.

Änderung der Bewegung = Änderung der Geschwindigkeit = Beschleunigung

$$\Rightarrow \mathbf{F} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\mathbf{a}$$

2 Dynamik des Massenpunktes

m ist die *träge Masse*, eine skalare Eigenschaft des Körpers, die sein Beharrungsvermögen gegenüber Bewegungsänderungen beschreibt. In manchen Situationen ändert sich die Masse, zum Beispiel

a) Relativitätstheorie

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \begin{cases} m_0 & v \ll c \\ \infty & v \leq c \end{cases}$$

b) Verbrennungsprozesse: Auto, Rakete

Dann benötigen wir eine allgemeinere Formulierung des 2. Gesetzes:

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = \dot{\mathbf{p}}$$

$\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ ist der *Impuls*. Das 2. Gesetz ist die historische Leistung von Isaac Newton, der dafür sogar die Infinitesimalrechnung erfunden hat (zeitgleich und unabhängig von Gottfried Wilhelm Leibniz). Wenn die Masse bekannt ist, kann man also aus der Beschleunigung (Kinematik) auf die Kräfte schließen (Dynamik). Mathematisch gesehen haben wir es mit einer gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung zu tun. Höhere Ableitungen treten in der Klassischen Mechanik glücklicherweise nicht auf.

3. Lex Tertia, Reaktionsgesetz

Die Wirkungen zweier Körper aufeinander sind stets gleich und von entgegengesetzter Richtung.

Bemerkungen Die zwei Kraftvektoren sind also anti-parallel zueinander:



Abbildung 2.1: Wirkungen zweier Körper aufeinander

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21} \quad \text{actio} = \text{reactio}$$

Das 3. Gesetz erlaubt es uns, Massen zu messen:

$$m_1 \mathbf{a}_1 = -m_2 \mathbf{a}_2 \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \left| \frac{a_2}{a_1} \right|$$

2 Dynamik des Massenpunktes

Mit dem 2. Gesetz kann dann aus der Kinematik (\mathbf{a}) auf die Dynamik (\mathbf{F}) geschlossen werden. Als Masseneinheit führen wir das Kilogramm (kg) ein.

$$\rightarrow \text{Krafteinheit } \frac{kg \cdot m}{s^2} = N \quad \text{Newton}$$

Wenn ein 1 kg Körper in 1 s gleichmässig um die Geschwindigkeit 1 m/s beschleunigt wird, dann wirkt eine konstante Kraft von 1 N .

4. Superpositionsprinzip (4. Gesetz)

Verschiedene Kräfte addieren sich linear:

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i$$

2.2 Grundschemata der Klassischen Mechanik

Kräfte treten idR als Kraftfelder $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$ auf. Eine Abhängigkeit von der Beschleunigung oder höheren Ableitungen gibt es idR nicht.

1. Freier Fall

Hierbei handelt es sich um den einfachsten Fall.

$$\mathbf{F}_s = m_s \mathbf{g} = \text{const.} \quad \left[\begin{array}{l} \mathbf{g}=(0,0,-1) \\ g=9,81 \text{ m/s}^2 \\ m_s \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{Erbeschleunigung} \\ \text{schwere Masse} \end{array}$$

Experimentelle Beobachtung: träge = schwere Masse, $m_s = m \Rightarrow$ 2. Gesetz: $m \mathbf{a} = m_s \mathbf{g} \Rightarrow \mathbf{a} = \mathbf{g} \Rightarrow$ Alle Körper fallen gleich schnell (in einem Inertialsystem und im Vakuum).

2. Zentralkräfte

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = f(r) \mathbf{e}_r$$

a) Gravitationskraft

$$f(r) = -\gamma \frac{mM}{r^2} \quad \left[\gamma=6,667 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg s}^2 \text{ Gravitationskonstante} \right.$$

Da Massen nur positiv sein können, ist die Gravitation immer anziehend. Dies wird durch das Minuszeichen im Kraftgesetz ausgedrückt.

b) Coulombkraft

$$f(r) = \frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon_0 r^2} \quad \left[\begin{array}{l} 4\pi \\ \epsilon_0=8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/\text{Nm}^2 \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{Konvention im SI-System} \\ \text{elektrische Feldkonstante} \end{array}$$

Die Coulombkraft ist anziehend oder abstossend je nach Vorzeichen der Ladungen. Im Gegensatz zur Gravitationskraft können sich Ladungen gegenseitig ausgleichen.

2 Dynamik des Massenpunktes

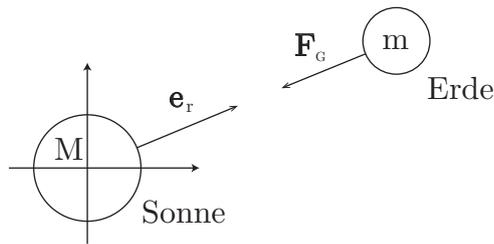


Abbildung 2.2: Veranschaulichung zur Gravitationskraft



anziehend bei entgegengesetzter Ladung

Abbildung 2.3: Veranschaulichung zur Coulombkraft

\Rightarrow Die zwei wichtigsten Fälle Kraftgesetze der klassischen Physik sind vom Typ

$$\mathbf{F} = \frac{\alpha \mathbf{e}_r}{r^2}$$

Die $1/r^2$ -Abhängigkeit hat dramatische Konsequenzen für den Charakter und die Stabilität der resultierenden Strukturen.

3. Lorentzkraft

$$\mathbf{F} = q[\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)] \quad \left[\begin{array}{l} \mathbf{E} \text{ elektrische Feldstärke} \\ \mathbf{B} \text{ magnetische Induktion} \end{array} \right]$$

Die Lorentzkraft wirkt auf geladene Teilchen in elektromagnetischen Feldern und ist eines der wenigen Beispiele für eine Geschwindigkeits-abhängige Kraft.

Die Kombination der drei Newtonschen Gesetze mit den typischen Kraftfeldern führt zum

Grundschema der Klassischen Mechanik

Schritt 1: Aufstellen der Bewegungsgleichung

Ziel ist es, die Bewegungsgleichung $\mathbf{F} = m \mathbf{a} = m \ddot{\mathbf{r}}$ aufzustellen. Mathematisch gesehen handelt es sich dabei um ein *drei-dimensionales System gewöhnlicher Differentialgleichungen zweiter Ordnung*:

$$m \ddot{x}_i - F_i(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3, x_1, x_2, x_3, t) = 0 \quad 1 \leq i \leq 3$$

2 Dynamik des Massenpunktes

Begriffserklärung Sei $x(t)$ eine Funktion von t . Dann ist die n -te Ableitung $x^{(n)}(t) = \frac{d^n}{dt^n} x(t)$. Eine *gewöhnliche Differentialgleichung n -ter Ordnung* ist eine Beziehung

$$f(x^{(n)}(t), x^{(n-1)}(t), \dots, \dot{x}(t), x(t), t) = 0$$

Beispiel: $x^{(5)}(t) + 3\dot{x}(t)x(t) + 3t = 0$

Abkürzungen Differentialgleichung = Dgl. / DGL / DG
gewöhnliche Dgl. = ODE = ordinary differential equation

Klassifikation

gewöhnlich Es gibt nur eine unabhängige Variable.

partiell Es gibt mehrere unabhängige Variablen.

PDE = partial differential equation = partielle Dgl.

Beispiel für PDE:

$$\Delta\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial x_3^2} = f(x_1, x_2, x_3)$$

z.Bsp. $\Delta\phi = 0$, $\Delta\phi = \alpha^2\phi$

Viele zentrale Gleichungen der Physik sind PDEs: Maxwell-Gleichungen, Schrödinger-Gleichung, Navier-Stokes-Gleichung.

explizit

Die Dgl. ist auflösbar nach der höchsten Ableitung:

$$x^{(n)}(t) = g(x^{(n-1)}(t), \dots, \dot{x}(t), x(t), t)$$

Ansonsten heißt die Dgl. *implizit*.

linear

Eine Dgl. ist linear, wenn f linear ist (also z.B. $f(x) = 1 + x$, aber nicht $f(x) = x^2$).

\Rightarrow Operatorschreibweise

$$L^{(n)}(t)x(t) = h(t), \quad L^{(n)}(t) = \sum_{i=0}^n f_i(t) \frac{d^i}{dt^i}$$

Beispiel:

$$x^{(5)}(t) + 3x(t) + 3t = 0 \Rightarrow L = \frac{\partial^5}{\partial t^5} + 3, \quad h(t) = -3t$$

Für die Lösung linearer ODEs gibt es viele mächtige Werkzeuge aus der Mathematik.

2 Dynamik des Massenpunktes

Gegenbeispiel: $\dot{x}(t)x(t)$ ist ein nicht-linearer Term $\Rightarrow x^{(5)}(t) + 3\dot{x}(t)x(t) + 3t = 0$ ist eine nicht-lineare Dgl.

Nicht-lineare ODEs sind in der Regel sehr schwer zu lösen, da es dafür keine Systematik gibt.

homogen Keine Terme ohne $x(t)$, also z.B. $h(t) = 0$ im linearen Fall. Andernfalls heißt die Dgl. *inhomogen*.

Schritt 2: Mathematische Lösung

Die mathematische Lösung der Dgl. erfolgt analytisch (mit Methoden wie der Separation der Variablen) oder numerisch (z.Bsp. Euler-oder Runge-Kutta-Verfahren).

Schritt 3: Physikalische Interpretation

Das gewonnene Ergebnis muss physikalisch Sinn machen. Wann immer möglich, sollten Dimensionsbetrachtungen und bekannte Grenzfälle zur Prüfung der Lösung durchgeführt werden.

Das Grundschemata der KM lässt sich am einfachsten in einer Dimension durchführen. Wir beginnen deshalb mit den eindimensionalen Fallgesetzen. Dafür benötigen wir aber noch das mathematische Instrument der Taylorentwicklung.

2.3 Mathematischer Einschub 4: Taylorentwicklung

Wir betrachten die *geometrische Reihe*:

$$S = 1 + x + x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

Beispiel

$$x = 0 \Rightarrow S = 1$$

$$x = \frac{1}{2} \Rightarrow S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots = 2$$

$$x = 1 \Rightarrow S = 1 + 1 + 1 + \dots \rightarrow \infty$$

Reihe konvergiert für $|x| < 1$. In diesem Fall erfolgt die Berechnung durch einen

2 Dynamik des Massenpunktes

Trick:

$$xS = x + x^2 + x^3 + \dots = S - 1 \Rightarrow S = \frac{1}{1-x}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

d.h. die Funktion $f(x) = 1/(1-x)$ ist also als *Potenzreihe* darstellbar. Geht das für alle Funktionen? Die allgemeine Form sollte dann so aussehen:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Vorteile:

1. Potenzterme sind einfach zu behandeln
2. Integration/Differentiation gliedweise
3. Näherung für kleine x : $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$

Wir nehmen an, dass die Funktion $f(x)$ beliebig oft differenzierbar ist. Die a_n sehen dann so aus:

$$\begin{aligned} 0.\text{Schritt: } f(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots & \Rightarrow f(0) &= a_0 \\ 1.\text{Schritt: } f'(x) &= a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots & \Rightarrow f'(0) &= a_1 \\ 2.\text{Schritt: } f''(x) &= 2a_2 + 3 \cdot 2a_3x + \dots & \Rightarrow f''(0) &= 2a_2 \\ & \vdots & & \end{aligned}$$

$$n.\text{Schritt: } f^{(n)}(x) = n!a_n + (n+1)!a_{n+1}x + \dots \Rightarrow f^{(n)}(0) = n!a_n$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \Rightarrow \boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n} \quad \text{Taylor-Reihe}$$

Beispiele

1. Geometrische Reihe

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{1-x} & \Rightarrow f(0) &= 1 \\ f'(x) &= \frac{1}{(1-x)^2} & \Rightarrow f'(0) &= 1 \\ f''(x) &= \frac{2}{(1-x)^3} & \Rightarrow f''(0) &= 2 \\ f'''(x) &= \frac{2 \cdot 3}{(1-x)^4} & \Rightarrow f'''(0) &= 3 \cdot 2 \\ & \vdots & & \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n} \quad \checkmark$$

2. Exponentialfunktion

$$f(x) = e^x \Rightarrow f(0) = 1$$

$$f'(x) = e^x \Rightarrow f'(0) = 1$$

$$\vdots$$

$$\Rightarrow e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$e^x = \underbrace{1 + x + \frac{1}{2}x^2}_{\text{quadrat. Naeherung}} + \mathcal{O}(x^3)$$

Hierbei steht $\mathcal{O}(x^3)$ für Terme der Ordnung x^3 und höher.

3. Trigonometrische Funktionen

$$f(x) = \sin x \Rightarrow f(0) = 0$$

$$f'(x) = \cos x \Rightarrow f'(0) = 1$$

$$f''(x) = -\sin x \Rightarrow f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = -\cos x \Rightarrow f'''(0) = -1$$

$$\Rightarrow \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

$\Rightarrow \sin x$ ist ungerade: $\sin(-x) = -\sin x$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \mathcal{O}(x^7)$$

Analog:

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^4)$$

Bei der Kombination verschiedener Taylor-Reihen muss auf die Ordnung geachtet werden!

$$e^x \cos x = \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^4)\right) \left(1 - \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^4)\right) = 1 + x - \frac{x^3}{3} + \mathcal{O}(x^4)$$

2 Dynamik des Massenpunktes

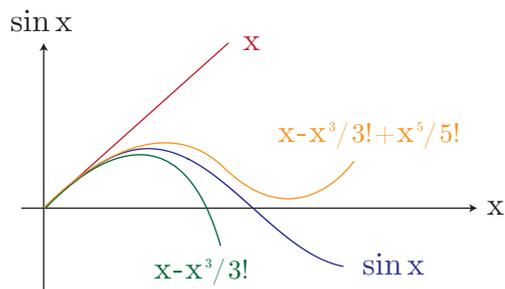


Abbildung 2.4: Approximation der Sinus-Funktion durch die ersten Glieder der Taylorreihe.

Der quadratische Term verschwindet also, der kubische Term hat Beiträge aus beiden Funktionen. Eine direkte Berechnung der Ableitungen ergibt das gleiche Ergebnis.

Die wichtigen Themen Konvergenzradius und Fehlerabschätzung werden hier aus Zeitgründen ausgelassen.

Aus mathematischen oder physikalischen Gründen muss oft um $x \neq 0$ entwickelt werden. So kann zum Beispiel der Logarithmus nicht um $x = 0$ entwickelt werden, da die Funktion dort divergiert. Dagegen bietet sich $x = 1$ für eine Entwicklung an.

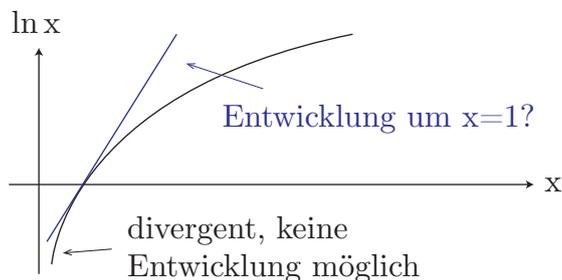


Abbildung 2.5: Wie sieht die Entwicklung des Logarithmus um $x=1$ aus?

Entwicklung einer beliebigen Funktion um x_0 : Substitution $u = x - x_0$, $g(u) = f(x_0 + u)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(x) &= f(x_0 + u) = g(u) \\ &= g(0) + g'(0)u + \frac{g''(0)}{2}u^2 + \dots \\ &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \dots \end{aligned}$$

2 Dynamik des Massenpunktes

$$\Rightarrow \boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n} \quad \text{Taylorreihe an beliebiger Stelle}$$

Beispiele

1) e^x entwickelt um $x_0 = 2$

$$e^x = e^2 \left(1 + (x - 2) + \frac{1}{2} (x - 2)^2 + \dots \right) \quad \text{weil } f^{(n)}(x) = e^x$$

2) $\ln(x)$ entwickelt um $x_0 = 1, u = x - x_0$

$$\begin{aligned} \ln(x) &= \ln(x_0 + u) = \ln x_0 \Big|_{x_0=1} + \frac{1}{x_0} \Big|_{x_0=1} u + \frac{-1}{x_0^2} \Big|_{x_0=1} \frac{u^2}{2} + \dots \\ &= u - \frac{u^2}{2} + \dots = (x - 1) - \frac{(x - 1)^2}{2} + \dots \end{aligned}$$

$$\text{Anders ausgedrückt: } \ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots$$

D.h. hier wird die Funktion gleich anders gewählt und um $x=0$ entwickelt.

3) $\sqrt{1+x}$ entwickelt um $x = 0$

$$\begin{aligned} \sqrt{1+x} &= 1 + \frac{1}{2} \frac{1}{(1+x)^{1/2}} \Big|_{x=0} x + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}\right) \frac{1}{(1+x)^{3/2}} \Big|_{x=0} \frac{x^2}{2} + \dots \\ &= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \dots \end{aligned}$$

Mit Mathematica: $\text{Series}[f[x], \{x, x_0, N\}]$ wobei N die Ordnung der Entwicklung ist. *Reihenentwicklung* ist auf Englisch *series expansion*.

2.4 Fallgesetze

Freier Fall

$$\boxed{\ddot{x}(t) = -g}$$

Dies ist eine gewöhnliche, lineare, inhomogene Dgl. 2. Ordnung. Die Lösung dieser Dgl. ist einfach, aber es ist wichtig, die Konzepte dahinter im Detail zu verstehen. Wir beginnen mit einer *Verdoppelung der Variablen*, d.h. statt x betrachten wir x und $v = \dot{x}$. Die Dgl. für v lautet:

$$\dot{v} = -g$$

2 Dynamik des Massenpunktes

Die Differentialgleichung 2. Ordnung für x wurde also durch Verdoppelung der Variablen $x \rightarrow (x, v)$ in zwei Differentialgleichungen 1. Ordnung überführt. In Matrixschreibweise kann es auch folgendermaßen geschrieben werden:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{lineare Abb.}} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}}_{\text{inhomogen}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix}}_{\text{inhomogen}}$$

Wir lösen erst die Gleichung für v :

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= -g \xrightarrow[\text{Variablen}]{\text{Separation der}} dv = -g dt \Rightarrow \int dv = -g \int dt + C_1 \\ &\Rightarrow \boxed{v = -gt + C_1} \end{aligned}$$

Damit lösen wir die Gleichung für x :

$$\dot{x} = v = -gt + C_1 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}gt^2 + C_1t + C_2$$

Definiert man nun $v(0) =: v_0 \Rightarrow C_1 = v_0$, $x(0) =: x_0 \Rightarrow C_2 = x_0$, so folgt:

$$\boxed{x = x_0 + v_0t - \frac{1}{2}gt^2}$$

Dieses Ergebnis ist die Wurfparabel ohne Horizontalgeschwindigkeit, die wir schon in der Kinematik hergeleitet hatten.

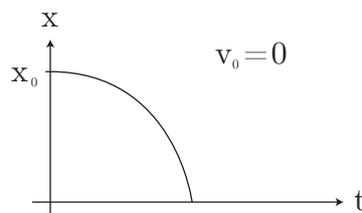


Abbildung 2.6: Freier Fall mit verschwindender Anfangsgeschwindigkeit

Fall mit Stoke'scher Reibung

Die Stokes-Kraft F_s ist die Reibungskraft, die eine Flüssigkeit auf eine Kugel ausübt, die sich mit einer Geschwindigkeit v bewegt. Sie wird in der Hydrodynamik

2 Dynamik des Massenpunktes

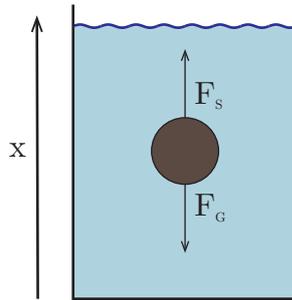


Abbildung 2.7: Kräfte auf fallende Kugel in Flüssigkeit

aus der Stokes-Gleichung (Navier-Stokes-Gleichung bei kleiner Reynoldszahl, also bei hoher Viskosität der Flüssigkeit) berechnet:

$$F_s = 6\pi\eta Rv \Rightarrow F_s = \zeta v, \zeta = 6\pi\eta R$$

η	Viskosität
R	Kugelradius
v	Geschwindigkeit
ζ	Reibungskoeffizient

Bewegungsgleichung:

$$m\ddot{x} = -mg - \zeta\dot{x} \Rightarrow m\dot{v} = -mg - \zeta v$$

Wir haben also wieder eine inhomogene lineare ODE 1. Ordnung für v . Wir fangen mit dem homogenen Fall an:

$$\dot{v} = -\frac{\zeta}{m}v$$

Das ist die Dgl. für den radioaktiven Zerfall: die differentielle Änderung ist proportional zur Zahl der Kerne:

$$\dot{N} = -\lambda N$$

N	#Kerne
λ	Zerfallskonstante, $[\lambda] = \frac{1}{T}$

Separation der Variablen:

$$\frac{dN}{N} = -\lambda dt$$

Wegen $\frac{dN}{N} = d \ln(N)$ ergibt sich:

$$\int d(\ln(N)) = -\lambda \int dt + C_0 \Rightarrow \ln(N) = -\lambda t + C_0$$

2 Dynamik des Massenpunktes

Anwenden der Exponentialfunktion auf beide Seiten liefert:

$$e^{\ln(N)} = N = e^{-\lambda t + C_0} = e^{-\lambda t} C_1 \quad \text{wobei } C_1 := e^{C_0}$$

Mit $N_0 = N(t=0)$ und somit $C_1 = N_0$ folgt:

$$\boxed{N(t) = N_0 e^{-\lambda t}} \quad \text{exponentieller Zerfall}$$

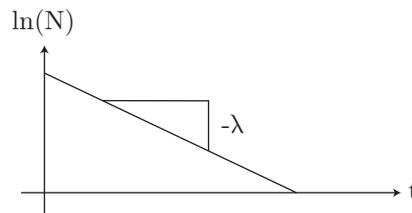


Abbildung 2.8: Radioaktiver Zerfall: die Zahl der Kerne zerfällt exponentiell.

Der komplementäre Fall ist das Populationswachstum: $\dot{N} = r N$ mit r Wachstumsrate

$$\Rightarrow \boxed{N(t) = N_0 e^{rt}} \quad \text{exp. Wachstum}$$

Zurück zur Lösung des homogenen Falls für den Fall mit Reibung: aus der Separation der Variablen ergab sich:

$$\dot{v} = -\frac{\zeta}{m} v \Rightarrow v = v_0 e^{-\frac{\zeta}{m} t}$$

d.h. die Geschwindigkeit zerfällt exponentiell. Weiter zum inhomogenen Fall: Separation der Variablen

$$\begin{aligned} dv &= -g \left(1 + \frac{\zeta v}{mg}\right) dt \Rightarrow \frac{dv}{(1 + \zeta v/mg)} = -g dt \\ \Rightarrow \int \frac{dv}{(1 + \zeta v/mg)} &= \int -g dt + C_1 \\ \Rightarrow \frac{mg}{\zeta} \ln\left(1 + \frac{\zeta v}{mg}\right) &= -gt + C_1 \\ \Rightarrow v = \frac{mg}{\zeta} \left[e^{\zeta(C_1 - gt)/mg} - 1 \right] &\xrightarrow{t \rightarrow \infty} v = \frac{-mg}{\zeta} = -v_\infty \quad \text{mit } v_\infty = \frac{mg}{\zeta} > 0 \end{aligned}$$

2 Dynamik des Massenpunktes

Dieses asymptotische Ergebnis kann auch direkt aus der Differentialgleichung gewonnen werden: Steady State Bedingung $\dot{v} = 0 \Rightarrow v = -\frac{mg}{\zeta} \checkmark$

$$\begin{aligned}
 t_0 = 0 &\Rightarrow v_0 = v_\infty [e^{C_1/v_\infty} - 1] \\
 &\Rightarrow \left(\frac{v_0}{v_\infty} + 1\right) = e^{C_1/v_\infty} \\
 &\Rightarrow \boxed{v = v_\infty \left[\left(\frac{v_0}{v_\infty} + 1\right)e^{-gt/v_\infty} - 1\right] = (v_0 + v_\infty)e^{-gt/v_\infty} - v_\infty}
 \end{aligned}$$

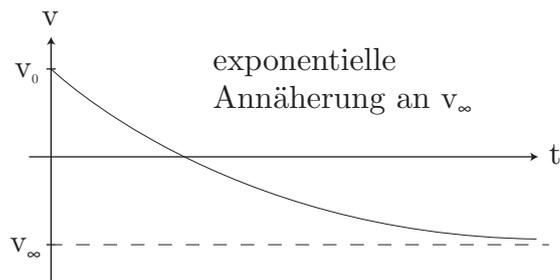


Abbildung 2.9: Beim Fall mit Stokes'scher Reibung zerfällt die Anfangsgeschwindigkeit exponentiell auf den asymptotischen Wert.

Lösung für die Position: $\dot{x} = v = (v_0 + v_\infty)e^{-gt/v_\infty} - v_\infty$

$$\Rightarrow x(t) = -(v_0 + v_\infty)\frac{v_\infty}{g}e^{-gt/v_\infty} - v_\infty t + C_2$$

Im Falle $t = 0$:

$$\Rightarrow x_0 = -(v_0 + v_\infty)\frac{v_\infty}{g} + C_2$$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = x_0 - v_\infty t + (v_0 + v_\infty)\frac{v_\infty}{g}(1 - e^{-gt/v_\infty})}$$

Für kurze Zeiten haben wir wieder das Ergebnis der Wurfparabel (beschleunigte Bewegung), für lange Zeiten gewinnt aber die Reibung und die Bewegung erfolgt mit konstanter Geschwindigkeit. Man überprüft leicht, dass alle physikalischen Dimensionen Sinn machen.

Limes freier Fall ? $\zeta \rightarrow 0 \Rightarrow v_\infty = \frac{mg}{\zeta} \rightarrow \infty$

Mit $u = \frac{gt}{v_\infty} \ll 1$ bei fester Zeit t gilt:

$$e^{-gt/v_\infty} = e^{-u} \approx 1 - u + \frac{u^2}{2} \quad \text{quadr. Näherung aus Taylorreihe für } e^{-u}$$

2 Dynamik des Massenpunktes

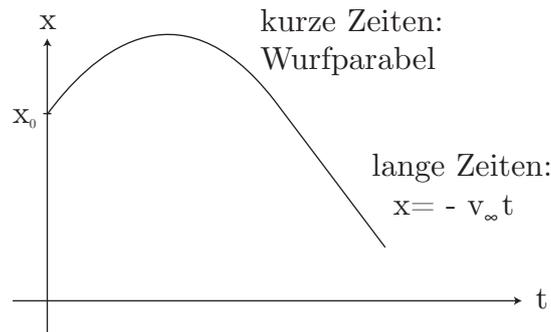


Abbildung 2.10: Beim Fall mit Stokes'scher Reibung geht die beschleunigte Bewegung für lange Zeiten in einen Fall mit konstanter Geschwindigkeit über.

Quadratische Näherung in allgemeine Lösung eingesetzt:

$$\begin{aligned} x &= x_0 - v_\infty t + (v_0 + v_\infty) \frac{v_\infty}{g} \left(\frac{gt}{v_\infty} - \frac{1}{2} \left(\frac{gt}{v_\infty} \right)^2 \right) \\ &= x_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \quad \checkmark \quad \text{freier Fall} \end{aligned}$$

wobei sich der lineare Term $-v_\infty t$ wegekürzt und beim quadratischen Term v_0 gegenüber v_∞ vernachlässigt werden kann.

Fall mit Newton'scher Reibung

Dieses quadratische Reibungsgesetz ergibt sich ebenfalls aus der Navier-Stokes-Gleichung, jetzt aber für den Fall kompressibler Gase mit vernachlässigbarer Zähigkeit:

$$m\ddot{x} = -mg - \underbrace{c \dot{x} |\dot{x}|}_{\text{Reibungskraft} \sim v^2}$$

Der Reibungskoeffizient $c = \rho A C_w / 2$ wobei ρ Dichte, A Querschnittsfläche und C_w der Widerstandsbeiwert sind (C_w beschreibt den effektiven Einfluss der vollständigen Geometrie). Es gibt zwei Bereiche (*Regimes*): F_N ist schwächer als F_S bei kleinen v , aber stärker bei großen v . Wenn man die zwei Fälle unter den Annahmen verschwindender Anfangsgeschwindigkeit und gleicher Endgeschwindigkeiten vergleicht, dann betrachtet man nur den Bereich, in dem F_N schwächer ist.

$$m\ddot{x} = -mg + c\dot{x}^2 \quad \text{für } \dot{x} \leq 0$$

2 Dynamik des Massenpunktes

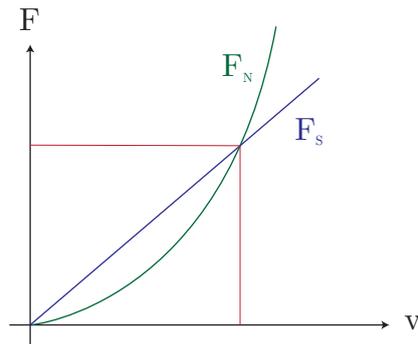


Abbildung 2.11: Vergleich von Stokes'scher und Newtonscher Reibungskraft als Funktion der Geschwindigkeit.

Für $\dot{x} \geq 0$ wäre das Vorzeichen des Reibungsterms umzudrehen. Steady State:
 $\ddot{x} = 0$

$$\Rightarrow v = \dot{x} = -\sqrt{\frac{mg}{c}} = -v_\infty \quad \text{Endgeschwindigkeit}$$

Lösen der Dgl.: Separation der Variablen

$$m\dot{v} = -mg\left(1 - \frac{cv^2}{mg}\right) \Rightarrow \int \frac{dv}{1 - (v/v_\infty)^2} = \int -g dt$$

Stammfunktion von $\frac{1}{1-v^2}$? \rightarrow Partialbruchzerlegung:

$$\frac{1}{1-v^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-v} + \frac{1}{1+v} \right)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow -gt + C_1 &= \frac{1}{2} \int dv \left[\frac{1}{1 - (v/v_\infty)} + \frac{1}{1 + (v/v_\infty)} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[-v_\infty \ln\left(1 - \frac{v}{v_\infty}\right) + v_\infty \ln\left(1 + \frac{v}{v_\infty}\right) \right] \\ &= \frac{v_\infty}{2} \ln\left(\frac{1 + (v/v_\infty)}{1 - (v/v_\infty)}\right) \end{aligned}$$

$$t = 0 \Rightarrow C_1 = \frac{v_\infty}{2} \ln\left(\frac{1 + (v_0/v_\infty)}{1 - (v_0/v_\infty)}\right)$$

Nach v auflösen:

$$\boxed{v = -v_\infty \frac{(v_\infty - v_0) - (v_\infty + v_0)e^{-2gt/v_\infty}}{(v_\infty - v_0) + (v_\infty + v_0)e^{-2gt/v_\infty}}}$$

2 Dynamik des Massenpunktes

Dimensionen: ✓

Grenzfälle:

$$t = 0 \Rightarrow v = v_0 \checkmark \quad (v_0 \leq 0 \text{ wegen } \dot{x} \leq 0)$$

$$t \rightarrow \infty \Rightarrow v = -v_\infty \checkmark$$

Der Limes des freien Falls ergibt sich korrekt für $c \rightarrow 0$ (hier ohne Rechnung).

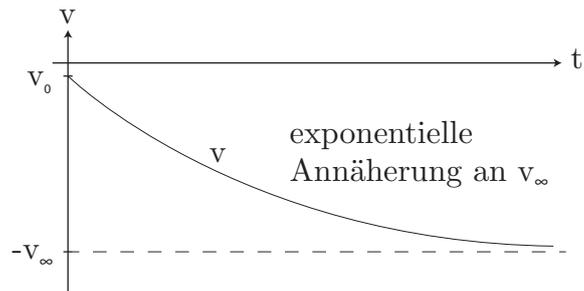


Abbildung 2.12: Grenzfälle

Vergleiche Stokes-Fall:

$$v = (v_0 + v_\infty)e^{-gt/v_\infty} - v_\infty$$

\Rightarrow Newton-Lösung zerfällt schneller, da der Exponent einen Faktor 2 hat.

Berechnung der Position: $\dot{x} = v$

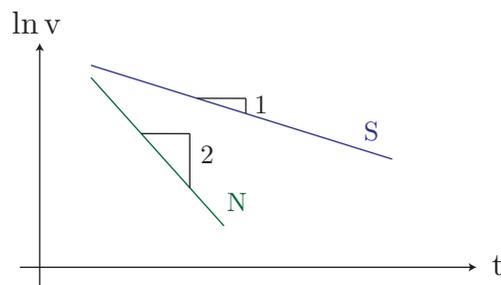


Abbildung 2.13: Die Zeitkonstanten von Stokes- und Newton-Fall sind unterschiedlich, wenn man auf die gleiche Endgeschwindigkeit skaliert.

$$x = x_0 + \int_{t_0}^t dt' v(t')$$

2 Dynamik des Massenpunktes

$$a = \frac{v_\infty + v_0}{v_\infty - v_0}, \quad u = \frac{2gt}{v_\infty}, \quad du = \frac{2g}{v_\infty} dt$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x - x_0 &= -\frac{v_\infty^2}{2g} \int_{u_0}^u du \frac{1 - ae^{-u}}{1 + ae^{-u}} \\ &= -\frac{v_\infty^2}{2g} \left[2 \ln(1 + ae^{-u}) + u \right]_{u_0}^u \\ &= -\frac{v_\infty^2}{2g} \left[2 \ln\left(1 + \frac{v_\infty + v_0}{v_\infty - v_0} e^{-2gt/v_\infty}\right) + \frac{2gt}{v_\infty} - 2 \ln\left(1 + \frac{v_\infty + v_0}{v_\infty - v_0}\right) \right] \\ &= -v_\infty t - \frac{v_\infty^2}{g} \ln \left[\frac{1}{2} \left(\left(1 - \frac{v_0}{v_\infty}\right) + \left(1 + \frac{v_0}{v_\infty}\right) e^{-2gt/v_\infty} \right) \right] \end{aligned}$$

Im Limes $t \rightarrow \infty$ ergibt sich für $v_0 = 0$:

$$x = x_0 - v_\infty t + \frac{v_\infty^2}{g} \quad \text{Stokes}$$

$$x = x_0 - v_\infty t + \ln(2) \frac{v_\infty^2}{g} \quad \text{Newton}$$

Da $\ln(2) < 1$, ist die Kugel im Newton-Fall weiter gekommen.

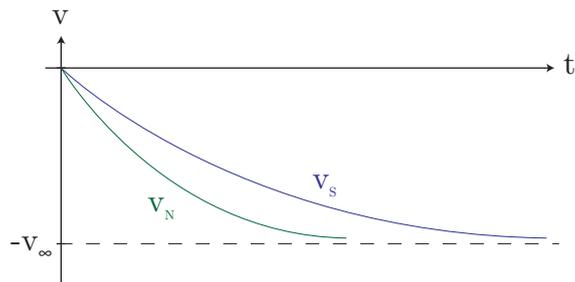


Abbildung 2.14: Bei Skalierung auf gleiche Endgeschwindigkeit ist die Newtonsche Reibungskraft kleiner, die Endgeschwindigkeit wird schneller erreicht.

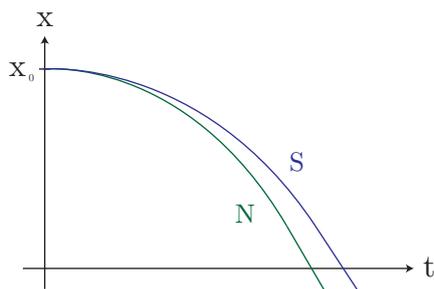


Abbildung 2.15: Im Newton-Fall wird mehr Höhe durchfallen, die zwei Kurven sind asymptotisch parallel.

2.5 Mathematischer Einschub 5: Lineare ODEs

Allgemeine Lösung homogener Dgl.

Wir betrachten zunächst den homogenen Fall für eine lineare ODE n-ter Ordnung:

$$L^{(n)}(t)x(t) = \sum_{k=0}^n f_k(t) \frac{d^k x(t)}{dt^k} = 0$$

Die allgemeine Lösung ist eine Lösungsschar $x(t|\gamma_1, \dots, \gamma_n)$, die von den n Integrationskonstanten γ_i abhängt.

Beispiel Radioaktiver Zerfall.

$$\dot{N} = -\lambda N \Rightarrow N = N_0 e^{-\lambda t} \quad [N_0 \text{ eine Integrationskonstante}]$$

Superpositionsprinzip: Mit $x_1(t)$ und $x_2(t)$ ist auch $c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)$ Lösung.

Beweis: durch Einsetzen

$$L^{(n)}(c_1 x_1 + c_2 x_2) = \underbrace{c_1 L^{(n)} x_1}_0 + \underbrace{c_2 L^{(n)} x_2}_0 = 0 \quad q.e.d.$$

Das Superpositionsprinzip legt nahe, dass die allgemeine Lösung in *Grundlösungen* zerlegt werden kann. Wir suchen also eine *Basis* für den Lösungsraum. Wie bei Vektoren definieren wir:

m Lösungen $x_1(t), \dots, x_m(t)$ heißen *linear unabhängig*, wenn

$$\sum_{j=1}^m \alpha_j x_j(t) = 0$$

nur für $\alpha_1, \dots, \alpha_m = 0$.

2 Dynamik des Massenpunktes

Satz Die allgemeine Lösung einer homogenen linearen Dgl. n-ter Ordnung lässt sich als Linearkombination von genau n linear unabhängigen Lösungsvektoren schreiben.

Beweis: Sei m die maximale Zahl der linear unabhängigen Lösungsvektoren. Dann ist die allgemeine Lösung

$$x(t|\gamma_1, \dots, \gamma_n) = \sum_{j=1}^m \alpha_j x_j(t)$$

Andernfalls wäre m nicht maximal.

Noch zu zeigen: $m = n$

$m < n \Rightarrow x$ wäre nicht die allgemeine Lösung \nexists

$m > n \Rightarrow x$ würde von mehr als n Parametern abhängen \nexists

$\Rightarrow m = n$

q.e.d.

Allgemeine Lösung inhomogener Dgl.

Jetzt zum inhomogenen Fall:

$$L^{(n)}(t)x(t) = h(t)$$

z.Bsp. $-mg$ für Fallgesetze.

Satz: Sei $x(t|\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung $L^{(n)}(t)x(t) = 0$ und sei $x_0(t)$ eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung, also $L^{(n)}(t)x_0(t) = h(t)$. Dann ist $\bar{x}(t|\gamma_1, \dots, \gamma_n) = x(t|\gamma_1, \dots, \gamma_n) + x_0(t)$ die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung.

Beweis: durch Einsetzen:

$$L^{(n)}\bar{x}(t) = \underbrace{L^{(n)}x(t)}_0 + \underbrace{L^{(n)}x_0(t)}_{h(t)} = h(t)$$

$\Rightarrow \bar{x}(t)$ ist Lösung

$\bar{x}(t)$ ist auch die allgemeine Lösung, da es von $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ abhängt.

q.e.d.

Beispiel Stokes-Fall

$$\underbrace{\dot{v}}_L = \underbrace{-g}_{\text{inhomogen}} - \frac{\zeta}{m} \underbrace{v}_L$$

2 Dynamik des Massenpunktes

homogen: $g = 0$

$$\Rightarrow v(t) = C e^{-\zeta/m t} \quad [C \text{ Integrationskonstante}]$$

Inhomogen: spezielle Lösung?

Steady state: Lösung:

$$\dot{v} = 0 \Rightarrow v(t) = -v_\infty = -\frac{mg}{\zeta}$$

\Rightarrow Allgemeine Lösung:

$$v(t) = C e^{-\zeta/m t} - v_\infty$$

$$t = 0 \Rightarrow v_0 = C - v_\infty \Rightarrow \boxed{v(t) = (v_0 + v_\infty) e^{-\zeta/m t} - v_\infty}$$

Das gleiche Ergebnis haben wir oben mit Separation der Variablen berechnet. Hier folgt es viel einfacher aus dem Satz über die allgemeine Lösung einer inhomogenen linearen ODE.

Damit ergibt sich folgendes Rezept:

1. n linear unabhängige Lösungen finden für die homogene Gleichung
2. eine spezielle Lösung für die inhomogene Dgl.

Konstante Koeffizienten

In der Klassischen Mechanik hat man es oft mit linearen Dgl. 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten zu tun.

$$a_2 \ddot{x} + a_1 \dot{x} + a_0 x = h(t)$$

Homogener Fall

Im homogenen Fall ($h(t) = 0$) verwendet man den Exponentialansatz: $x = x_0 e^{rt}$

$$\Rightarrow a_2 x_0 e^{rt} r^2 + a_1 x_0 e^{rt} r + a_0 x_0 e^{rt} = 0$$

$$\Rightarrow x_0 e^{rt} \underbrace{(a_2 r^2 + a_1 r + a_0)}_0 = 0 \quad \text{charakteristische Gleichung für } r$$

$$\Rightarrow r_{1/2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2 a_0}}{2a_2}$$

2 Dynamik des Massenpunktes

Allgemeine Lösung:

$$\Rightarrow x(t) = \begin{cases} c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} & \text{für } r_1 \neq r_2 \\ c_1 e^{r_1 t} + c_2 t e^{r_2 t} & \text{für } r_1 = r_2 \end{cases}$$

Achtung: negative Diskriminante möglich, die Lösungen der charakteristischen Gleichung sind dann komplex.

Inhomogener Fall

Spezielle Lösungen beim inhomogenen Fall ($h(t) \neq 0$) bekommt man immer über eine *Variation der Konstanten*:

$$x_s(t) = C_1(t)x_1(t) + C_2(t)x_2(t)$$

Die resultierende Differentialgleichungen für die $C_i(t)$ sind oft sehr kompliziert. Einfache Spezialfälle:

- 1) $h(t) = \text{const.}$ (z.Bsp. Stokes) $\Rightarrow x_s = \frac{h}{a_0}$ Steady State
- 2) $h(t) = a + bt + ct^2$ $\Rightarrow x_s = A + Bt + Ct^2$
- 3) $h(t) = Ae^{\lambda t}$ $\Rightarrow x_s = Ce^{\lambda t}$
- 4) $h(t) = C_1 \sin(\omega t) + C_2 \cos(\omega t)$ $\Rightarrow x_s = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t)$

2.6 Mathematischer Einschub 6: Komplexe Zahlen

Im Mathematischen Einschub 5 haben wir gelernt, dass man lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten mit einem Exponentialansatz lösen kann. Das führt auf ein charakteristisches Polynom, das in manchen Fällen komplexe Lösungen hat. Das wichtigste Beispiel dafür ist der *harmonische Oszillator*, der das einfachste Modell für eine Schwingung ist und damit eines der wichtigsten Modelle der Physik. Es handelt sich dabei um eine Masse, die durch eine lineare Rückstellkraft auf ihre Ruheposition gezogen wird.

$$m\ddot{x} = -kx \quad \text{lineare homogene Dgl. 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten}$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

2 Dynamik des Massenpunktes

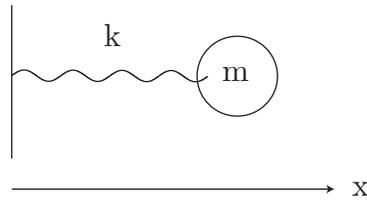


Abbildung 2.16: Harmonischer Oszillator: eine Masse m wird durch eine Feder mit Federkonstante k gehalten.

Mit dem Exponentialansatz ergibt sich:

$$x = Ae^{\alpha t} \Rightarrow Ae^{\alpha t}(\alpha^2 + \omega_0^2) = 0$$

$$\Rightarrow \text{charakt. Gleichung } \alpha^2 = -\omega_0^2 \Rightarrow \boxed{\alpha = \pm \underbrace{\sqrt{-1}}_i \omega_0}$$

Die imaginäre Zahl $i = \sqrt{-1}$ bildet die Grundlage, um die komplexen Zahlen zu definieren. Eine komplexe Zahl z ist von der folgenden Form

$$z = x + iy$$

In der komplexen Zahlenebene werden Real- und Imaginärteil senkrecht zueinan-

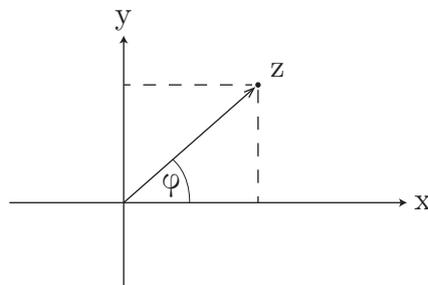


Abbildung 2.17: Vektorinterpretation in der komplexen Zahlenebene

der aufgetragen, eine komplexe Zahl kann dann als Vektor mit Betrag und Winkel interpretiert werden. Für den Betrag von z gilt:

$$r^2 = x^2 + y^2 = |z|^2$$

Für den Winkel (auch Argument oder Phase genannt) gilt:

$$\varphi = \arg(z) = \arctan \frac{y}{x}$$

2 Dynamik des Massenpunktes

Mit der Taylorreihe ergibt sich folgende Potenzreihe:

$$\begin{aligned} e^{i\varphi} &= 1 + (i\varphi) + \frac{1}{2}(i\varphi)^2 + \frac{1}{6}(i\varphi)^3 + \dots \\ &= 1 + i\varphi - \frac{1}{2}\varphi^2 - \frac{1}{6}i\varphi^3 + \dots \\ &= \left(1 - \frac{\varphi^2}{2} + \dots\right) + i\left(\varphi - \frac{\varphi^3}{6} + \dots\right) \\ &= \boxed{\cos \varphi + i \sin \varphi = e^{i\varphi}} \end{aligned}$$

Obige Gleichung ist nach dem Mathematiker LEONHARD EULER benannt und heißt deshalb auch **Eulersche Formel**. Setzt man in dieser $\varphi = \pi$, so ergibt sich ein schöner Zusammenhang (auch *Eulersche Identität* genannt) zwischen den fünf wichtigsten Zahlen der Mathematik, also $0, 1, \pi, e, i$:

$$\boxed{e^{i\pi} + 1 = 0}$$

Durch

$$z = x + iy = r \cos \varphi + i r \sin \varphi$$

und der Eulerschen Formel erhält man die **Polardarstellung** einer komplexen Zahl:

$$\boxed{z = r e^{i\varphi}}$$

Für die komplex konjugierte Zahl $z^* = x - iy$ ergibt sich die Polardarstellung:

$$\begin{aligned} z^* &= x - iy \\ &= r \cos \varphi - i r \sin \varphi \\ &= r \cos(-\varphi) + i r \sin(-\varphi) \\ &= r e^{-i\varphi} \end{aligned}$$

Die Beträge stimmen also überein, aber die Winkel sind gegensätzlich.

$$\begin{aligned} z z^* &= r e^{i\varphi} r e^{-i\varphi} = r^2 e^{i\varphi - i\varphi} = r^2 \\ |e^{i\varphi}| &= \sqrt{e^{i\varphi} e^{-i\varphi}} = 1 \quad \text{diese Zahlen liegen auf dem Einheitskreis} \end{aligned}$$

Aus

$$\begin{aligned} e^{i\varphi} &= \cos \varphi + i \sin \varphi \\ e^{-i\varphi} &= \cos \varphi - i \sin \varphi \end{aligned}$$

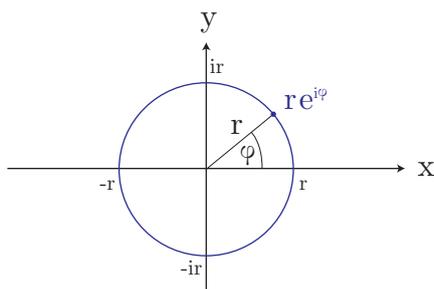


Abbildung 2.18: Darstellung einer komplexen Zahl in Polarkoordinaten

folgt

$$\left. \begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{1}{2}(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}) \\ \sin \varphi &= \frac{1}{2i}(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Umkehrung der} \\ \text{Euler-Formel} \end{array}$$

Vergleiche die analogen Formeln im Reellen für Kosinus und Sinus Hyperbolicus:

$$\begin{aligned} \cosh \varphi &= \frac{1}{2}(e^\varphi + e^{-\varphi}) = \cos(i\varphi) \\ \sinh \varphi &= \frac{1}{2}(e^\varphi - e^{-\varphi}) = -i \sin(i\varphi) \end{aligned}$$

Additionstheoreme:

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) &= \operatorname{Re} e^{i(\alpha+\beta)} = \operatorname{Re} e^{i\alpha} e^{i\beta} \\ &= \operatorname{Re} (\cos \alpha + i \sin \alpha)(\cos \beta + i \sin \beta) \\ &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \end{aligned}$$

Analog kann auch für den Sinus verfahren werden. Es ergibt sich also:

$$\boxed{\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta}$$

$$\boxed{\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}$$

2.7 Der harmonische Oszillator

Grundgleichung

Die Masse erfährt eine lineare Rückstellkraft F , die der Auslenkung x proportional ist. Es gilt das Hooke'sche Gesetz (genannt nach ROBERT HOOKE, einem

2 Dynamik des Massenpunktes

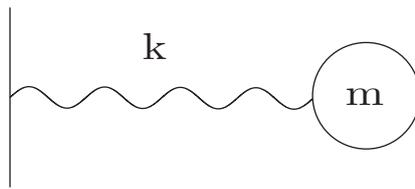


Abbildung 2.19: Harmonischer Oszillator: eine Masse m wird durch eine Feder mit Federkonstante k gehalten.

Zeitgenossen von Newton, der das Mikroskop erfunden und damit als erster Mensch Zellen beobachtet hat, aber auch wichtige Beiträge zur Mechanik geleistet hat):

$$F = -kx$$

Die Federkonstante k hat somit die Einheit: $[k] = \frac{N}{m}$.

$$\Rightarrow m\ddot{x} = -kx$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Die Dgl. ist linear, homogen und hat konst. Koeffizienten.

$$\Rightarrow \text{Exponentialansatz: } x = Ae^{\alpha t} \Rightarrow Ae^{\alpha t}(\alpha^2 + \omega_0^2) = 0$$

$$\Rightarrow \text{charakt. Gleichung: } \alpha^2 + \omega_0^2 = 0$$

$$\Rightarrow \alpha = \pm i\omega_0$$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = A_+ e^{i\omega_0 t} + A_- e^{-i\omega_0 t}} \quad \text{allg. Lösung}$$

Man beachte: $x(t)$ muss reell sein! Wir fordern also $x = x^*$:

$$A_+ e^{i\omega_0 t} + A_- e^{-i\omega_0 t} = x = x^* = A_+^* e^{-i\omega_0 t} + A_-^* e^{i\omega_0 t}$$

$$\Rightarrow A_+ = A_-^*, \quad A_- = A_+^* \Rightarrow A_+ = a + ib, \quad A_- = a - ib$$

Es gibt also nur zwei unabhängige Parameter a und b , wie es bei einer Differentialgleichung zweiter Ordnung auch sein muss.

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = A \sin(\omega_0 t) + B \cos(\omega_0 t)} \quad A = -2b, \quad B = 2a$$

Aufgrund der Anfangsbedingungen ergibt sich $B = x(0)$ und $A = \frac{\dot{x}(0)}{\omega_0}$. Die allg. Lösung ist in dieser Darstellung die Überlagerung von zwei Schwingungen mit

2 Dynamik des Massenpunktes

gleicher Frequenz, aber verschiedenen Amplituden. Sie kann aber umgeschrieben werden zu

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \underbrace{\sqrt{A^2 + B^2}}_{A_0} \left(\underbrace{\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}}_{\cos \alpha} \sin(\omega_0 t) + \underbrace{\frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}}_{\sin \alpha} \cos(\omega_0 t) \right) \\
 &= A_0 (\cos \alpha \sin(\omega_0 t) + \sin \alpha \cos(\omega_0 t))
 \end{aligned}$$

Durch Anwendung der Additionstheoreme ergibt sich:

$$\boxed{x(t) = A_0 \sin(\omega_0 t + \alpha)}$$

Die allg. Lösung ist also *eine* Schwingung mit Eigenfrequenz ω_0 , Phasenverschiebung α und Amplitude A_0 .

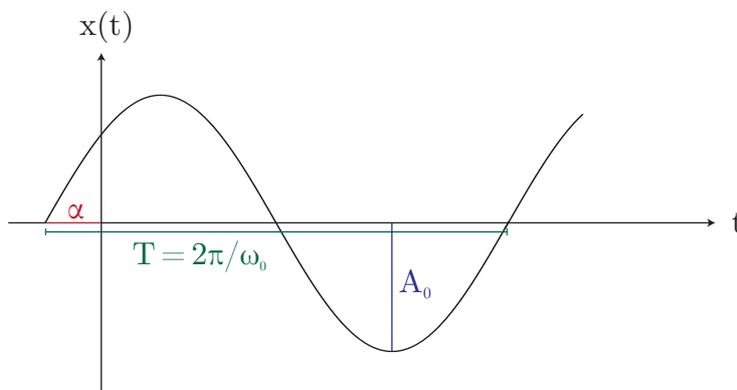


Abbildung 2.20: Die allg. Lösung des harmonischen Oszillators ist eine reine Schwingung.

Der harmonische Oszillator ist nicht nur für die Mechanik sehr wichtig, er kommt zum Beispiel auch in der Elektrodynamik und der Quantenmechanik vor.

Beispiel elektrischer Schwingkreis

$$U_L = L\dot{I}, \quad U_C = \frac{Q}{C}$$

Nach KIRCHHOFF ist die Summe der Spannungen 0, d.h. $U_L + U_C = 0$.

$$\Rightarrow L\dot{I} + \frac{Q}{C} = 0 \quad [I \text{ elektr. Strom} = \dot{Q}]$$

$$\Rightarrow L\ddot{I} + \frac{1}{C}I = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{I} + \omega_0^2 I = 0} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

2 Dynamik des Massenpunktes

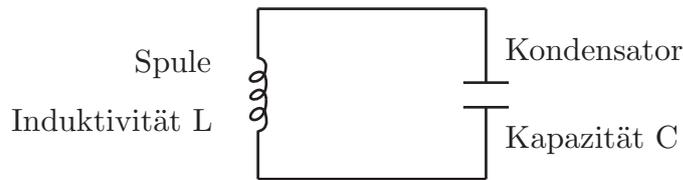


Abbildung 2.21: Veranschaulichung zum elektrischen Schwingkreis

Phasenraum

$$m\ddot{x} = -k x$$

Verdoppeln der Variablen:

$$v = \dot{x}, \quad \ddot{x} = \dot{v} = -\frac{k}{m}x = -\omega_0^2 x$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}$$

Die (x, v) - Ebene ist der *Phasenraum* für den harmonischen Oszillator (in diesem Fall handelt es sich also um eine *Phaseebene*). (\dot{x}, \dot{v}) ist das Vektorfeld, das den Fluss des Systems durch den Phasenraum beschreibt. Das resultierende Flussdiagramm heisst *Phasenportrait*. Der harmonische Oszillator hat geschlossene Tra-

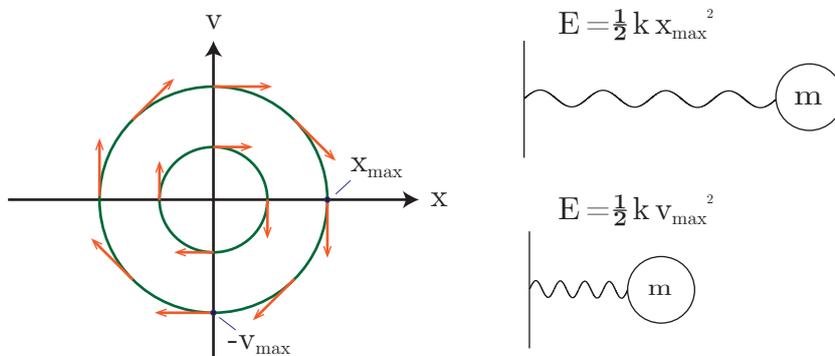


Abbildung 2.22: Phasenportrait für den harmonischen Oszillator

jektorien, die Ellipsen sind. Ellipseneigenschaft:

$$\frac{\dot{x}}{\dot{v}} = \frac{\frac{dx}{dt}}{\frac{dv}{dt}} = \frac{dx}{dv} = \frac{v}{-\omega_0^2 x}$$

2 Dynamik des Massenpunktes

$$\begin{aligned} \begin{array}{l} \text{Separation} \\ \Rightarrow \\ \text{der Variablen} \end{array} & -\omega_0^2 x dx = v dv \Rightarrow \frac{1}{2}\omega_0^2 x^2 + \frac{1}{2}v^2 = \text{const} \\ \Rightarrow & \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \text{const} = E \end{aligned}$$

Die Energie E ist eine Erhaltungsgröße.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}kx^2 & \text{ Federenergie} \\ \frac{1}{2}mv^2 & \text{ kinetische Energie} \end{aligned}$$

Mathematisch ist das genau die Ellipsengleichung.

Da der harmonische Oszillator linear ist, hat er keine ausgezeichnete Amplitude, diese wird durch die Anfangsbedingung gesetzt, ändert sich dann aber nicht mehr. Kleine Störungen bleiben klein, aber sie verschwinden auch nicht mehr. Bei technischen Anwendungen möchte man jedoch oft eine ausgezeichnete und robuste Amplitude implementieren. Dafür benötigt man deshalb *nicht-lineare Oszillatoren*.

Einfachster Fall: *van der Pol Oszillator*

$$\ddot{x} + \underbrace{\mu(x^2 - 1)}_{\text{neuer Term}} \dot{x} + x = 0$$

$$|x| = 1 \Rightarrow \text{harmonischer Oszillator}$$

$$|x| > 1 \Rightarrow \text{positive Dämpfung}$$

$$|x| < 1 \Rightarrow \text{negative Dämpfung}$$

Beispiel Tetrode-Schaltung von van der Pol

$$U = \frac{I^3}{3} - I \text{ mit geeigneten Einheiten}$$

$$L\ddot{I} + U'(I)\dot{I} + \frac{1}{C}I = 0 \text{ Dgl. für van der Pol Oszillator}$$

Gedämpfter harmonischer Oszillator

Wir erweitern den harmonischen Oszillator um einen Reibungsterm (ähnlich der Stokeschen Reibung bei den Fallgesetzen):

$$m\ddot{x} = -kx - \zeta\dot{x}$$

2 Dynamik des Massenpunktes

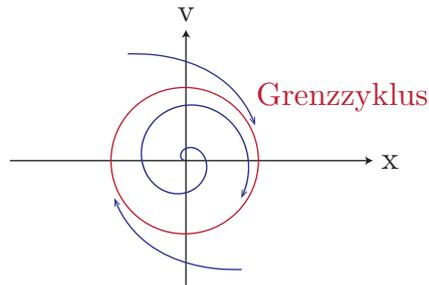


Abbildung 2.23: Phasenportrait des van der Pol Oszillators für kleines μ . Alle Trajektorien enden im gleichen Grenzyklus, d.h. die Amplitude ist für alle Anfangsbedingungen gleich.

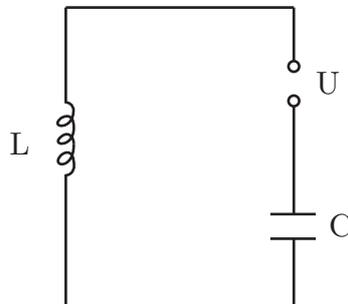


Abbildung 2.24: Die Schaltung von van der Pol mit einer passenden nicht-linearen Spannungsquelle.

$$\beta = \frac{\zeta}{2m} \quad \text{Dämpfung}$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0}$$

$$\Rightarrow \text{Exponentialansatz: } x = ae^{\lambda t}$$

$$\Rightarrow \text{charakt. Gleichung: } \lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda_{1/2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}}$$

$$\Rightarrow x = a_1 e^{\lambda_1 t} + a_2 e^{\lambda_2 t} \quad (\lambda_1 \neq \lambda_2)$$

2 Dynamik des Massenpunktes

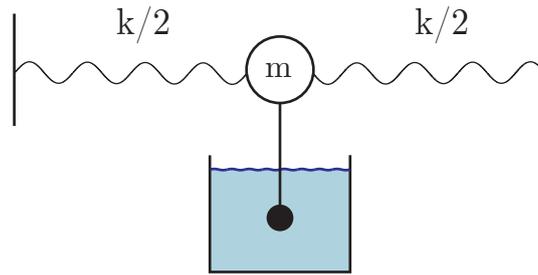


Abbildung 2.25: Möglicher Aufbau für einen gedämpften harmon. Oszillator

Es können also drei Fälle eintreten:

$\beta^2 < \omega_0^2$ schwache Dämpfung

$\beta^2 = \omega_0^2$ kritische Dämpfung

$\beta^2 > \omega_0^2$ starke Dämpfung

Beispiel elektrischer Schwingkreis mit Widerstand

$$\dot{U}_R + \dot{U}_L + \dot{U}_C = 0$$

$$R\dot{I} + L\ddot{I} + \frac{1}{C}I = 0$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}, \quad \beta = \frac{R}{2L}$$

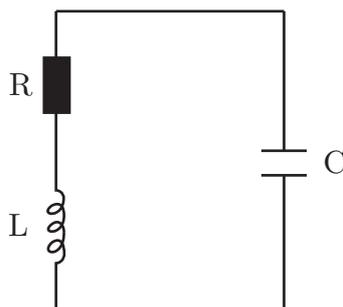


Abbildung 2.26: Der elektrische Schwingkreis mit Widerstand ist gedämpft.

2 Dynamik des Massenpunktes

1. Schwache Dämpfung

$$\beta^2 < \omega_0^2 \Rightarrow \lambda_{1/2} = -\beta \pm i\omega, \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$
$$\Rightarrow x = \underbrace{e^{-\beta t}}_{\text{Dämpfung der Amplitude}} \underbrace{(a_1 e^{i\omega t} + a_2 e^{-i\omega t})}_{\text{Schwingung mit Frequenz } \omega < \omega_0}$$

Mit den Anfangsbedingungen erhält man:

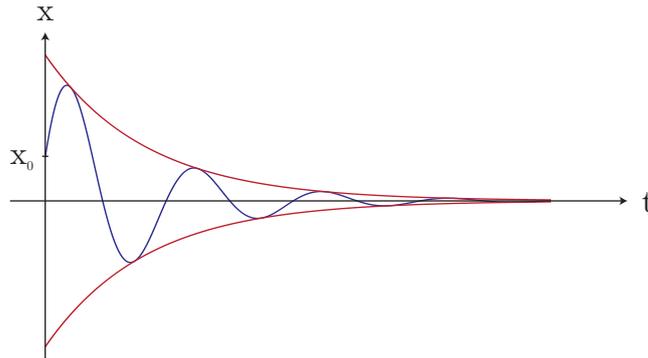


Abbildung 2.27: Schwache Dämpfung: exponentielle Dämpfung der Amplitude.

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = e^{-\beta t} \left(x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0 + \beta x_0}{\omega} \sin(\omega t) \right)}$$

Das System schwingt mit Frequenz $\omega < \omega_0$ und die Amplitude ist exponentiell gedämpft.

2. Kritische Dämpfung

$$\beta^2 = \omega_0^2 \Rightarrow \omega = 0$$

\Rightarrow nur eine Lösung $\lambda = -\beta$ für die charakteristische Gleichung

\Rightarrow Fall $r_1 = r_2$ im ME Differentialgleichungen

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = e^{-\beta t} (x_0 + (v_0 + \beta x_0)t)}$$

Dies entspricht dem Limes $\omega \rightarrow 0$ im Fall 1 ($\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1$ für $x \rightarrow 0$). Es gibt keine Schwingung mehr, höchstens einen Nulldurchgang bei entsprechenden Anfangsbedingungen (*aperiodischer Grenzfall*).

2 Dynamik des Massenpunktes

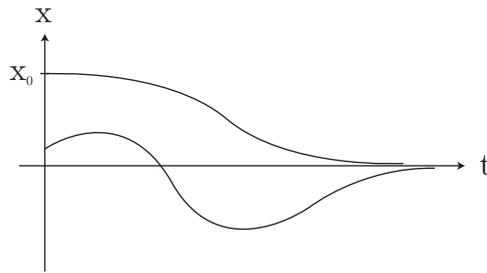


Abbildung 2.28: Kritische Dämpfung: aperiodischer Grenzfall.

3. Starke Dämpfung

$$\beta > \omega_0 \Rightarrow \lambda_{1/2} = -\beta \pm \gamma \quad 0 < \gamma = \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} < \beta$$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = e^{-\beta t}(a_1 e^{\gamma t} + a_2 e^{-\gamma t})}$$

Es liegt also ein rein exponentieller Abfall ohne Schwingung vor (*Kriechfall*).

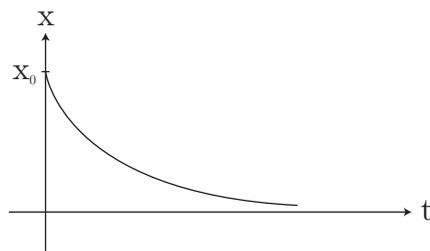


Abbildung 2.29: Starke Dämpfung: Kriechfall.

$$a_1 = \frac{1}{2} \left(x_0 + \frac{v_0 + \beta x_0}{\gamma} \right)$$

$$a_2 = \frac{1}{2} \left(x_0 - \frac{v_0 + \beta x_0}{\gamma} \right)$$

Getriebener harmonischer Oszillator

Mechanisches System: das System wird von aussen mit Frequenz ω getrieben

$$\boxed{\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos(\omega t)}$$

2 Dynamik des Massenpunktes

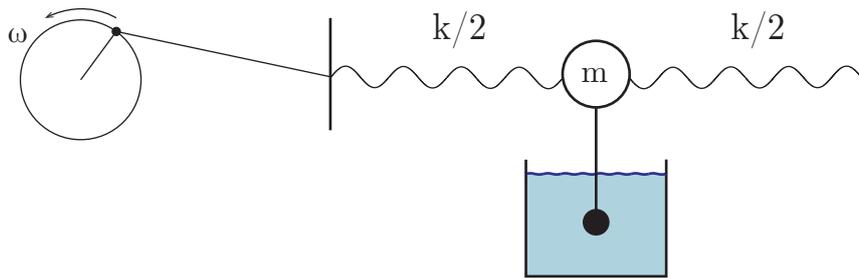


Abbildung 2.30: Getriebener harmon. Oszillator

Beispiel Realisierung als elektrischer Schaltkreis: $U = U_0 \sin \omega t$

$$\Rightarrow L\ddot{I} + R\dot{I} + \frac{I}{C} = U_0 \omega \cos \omega t$$

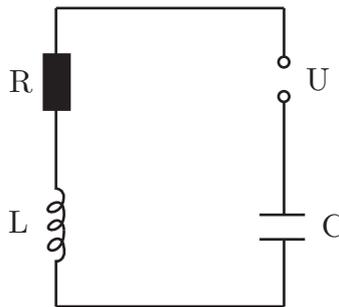


Abbildung 2.31: Der elektrische Schaltkreis für den getriebenen harmonischen Oszillator enthält eine Wechselspannung.

Um die Differentialgleichung für den getriebenen harmonischen Oszillator mit einem Exponentialansatz lösen zu können, setzen wir die Lösung einfach ins Komplexe fort:

$$\ddot{z} + 2\beta\dot{z} + \omega_0^2 z = \frac{F_0}{m} e^{i\omega t}$$

Als reelle Lösung nehmen wir dann $x(t) = \text{Re } z(t)$.

2 Dynamik des Massenpunktes

Die allgemeine Lösung ist nach dem ME Differentialgleichungen die Summe der allgemeinen homogenen Lösung und einer speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung:

$$x(t) = x_{\text{hom}}(t) + x_0(t)$$

$x_{\text{hom}}(t)$ entspricht $F_0 = 0 \Rightarrow$ gedämpfter harm. Oszillator \Rightarrow Lsg. zerfällt in der Zeit \Rightarrow *Einschwingvorgang*. $x_0(t)$ dominiert also nach dem Einschwingen \Rightarrow wir suchen nur nach dieser Lösung. Mit dem Exponentialansatz $z(t) = Ae^{i\omega t} = |A| e^{i\varphi} e^{i\omega t}$ bekommen wir also für die reelle Lösung nach langer Zeit:

$$x(t) = x_0(t) = |A| \operatorname{Re} (e^{i\varphi} e^{i\omega t}) = |A| \cos(\omega t + \varphi)$$

Wir benötigen also Betrag $|A|$ und Phase φ von A . Wir setzen den Exponentialansatz in die Differentialgleichung ein:

$$\underbrace{\left[A(-\omega^2 + 2i\beta\omega + \omega_0^2) - \frac{F_0}{m} \right]}_{=0} e^{i\omega t} = 0$$

$$\Rightarrow A = -\frac{F_0}{m} \frac{1}{(\omega^2 - \omega_0^2) - 2i\beta\omega} = -\frac{F_0}{m} \frac{(\omega^2 - \omega_0^2) + 2i\beta\omega}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}$$

$$\Rightarrow |A| = \sqrt{AA^*} = \frac{F_0}{m} \left(\frac{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}{((\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\beta^2\omega^2)^2} \right)^{1/2}$$

$$\boxed{|A| = \frac{F_0}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}}$$

$$|A| \rightarrow \begin{cases} \frac{F_0}{m\omega_0^2} = \frac{F_0}{k} & \omega \rightarrow 0 \\ \frac{F_0}{m} \frac{1}{\omega^2} & \omega \rightarrow \infty \end{cases}$$

Im Limes $\beta \rightarrow 0$ kommt es zur *Resonanzkatastrophe* (im Englischen *resonance disaster*), wenn die treibende Frequenz der Eigenfrequenz entspricht. Dieses Phänomen wird in der Regel für grosse Schwingungen von Brücken verantwortlich gemacht, z.B. beim Einbruch der Brücke von Angers 1850, der Tacoma-Narrows-Brücke 1940 oder den Schwingungen der Milleniumsbrücke London 2000.

Nach der Amplitude betrachten wir noch die Phasenverschiebung:

$$\operatorname{Re} A = -\frac{m}{F_0} |A|^2 (\omega^2 - \omega_0^2)$$

$$\operatorname{Im} A = -2\frac{m}{F_0} |A|^2 \beta\omega < 0$$

2 Dynamik des Massenpunktes

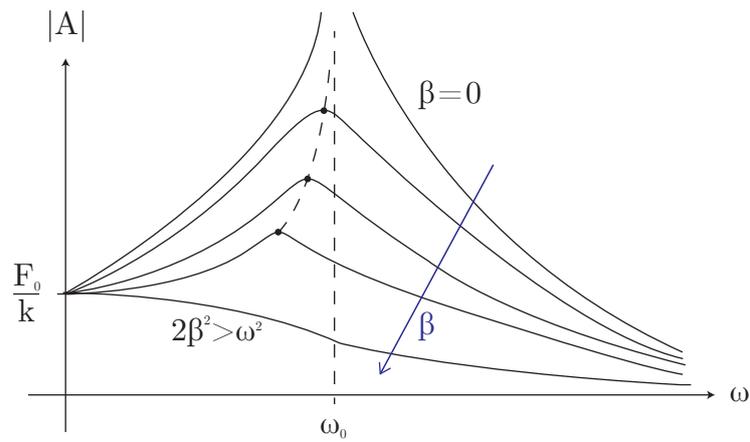


Abbildung 2.32: Amplitude des getriebenen harmonischen Oszillators.

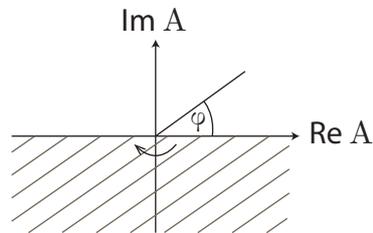


Abbildung 2.33: Da der Realteil negativ ist, hinkt die Schwingung der Anregung hinterher.

$$\varphi = \arctan \frac{\operatorname{Im} A}{\operatorname{Re} A}$$

$$\Rightarrow 0 > \varphi > -\pi$$

\Rightarrow Schwingung hinkt hinterher

$$\omega = \omega_0 \Rightarrow \operatorname{Re} A = 0 \Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{2}$$

2 Dynamik des Massenpunktes

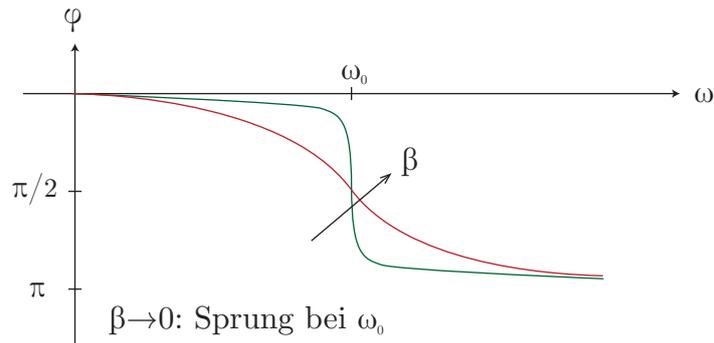


Abbildung 2.34: Je kleiner die Dämpfung, desto sprunghafter die Phasenverschiebung.

Fadenpendel

Polarkoordinaten: die Gewichtskraft kann in Radial- und Winkelanteile zerlegt werden:

$$\mathbf{F}_G = F_r \mathbf{e}_r + F_\varphi \mathbf{e}_\varphi$$

$$F_r = mg \cos \varphi$$

$$F_\varphi = -mg \sin \varphi$$

Bewegungsgleichung:

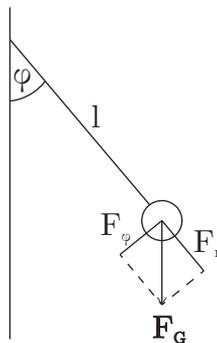


Abbildung 2.35:

$$\begin{aligned} m[a_r \mathbf{e}_r + a_\varphi \mathbf{e}_\varphi] &= m[(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\mathbf{e}_r + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})\mathbf{e}_\varphi] \\ &= (F_r + F_F)\mathbf{e}_r + F_\varphi \mathbf{e}_\varphi \quad [F_F \text{ Fadenspannung}] \end{aligned}$$

2 Dynamik des Massenpunktes

Die Fadenspannung ist das erste Beispiel für eine *Zwangskraft*, die garantiert, dass eine bestimmte Randbedingung eingehalten wird. Hier ist das die konstante Fadenlänge.

$$r = l = \text{const.} \Rightarrow \ddot{r} = \dot{r} = 0$$

$$\Rightarrow F_F = -ml\dot{\varphi}^2 - mg \cos \varphi$$

Für die Lösung benötigen wir die Fadenspannung nicht explizit, wir können sie hinterher falls gewünscht ausrechnen. Wirklich relevant ist hier nur die φ -Richtung:

$$ml\ddot{\varphi} = -mg \sin \varphi$$

$$\Rightarrow l\ddot{\varphi} = -g \sin \varphi \quad (\text{hier geht träge = schwere Masse ein})$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0} \quad \text{nicht-lineare ODE}$$

Näherung kleiner Winkel: $\sin \varphi \approx \varphi$

$$\boxed{\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

Wir erhalten also wieder den harmonischen Oszillator. Aus Dimensionsgründen konnte man schon erraten, was die Eigenfrequenz sein muss. Diese hängt also nur von der Fadenlänge und nicht von der Masse ab. Dies ist der einfachste Nachweis dass träge = schwere Masse gilt.

2.8 Energie und Drehimpuls

Energie in 1D

Sei die Kraft $F = F(x)$ nur vom Raum abhängig.

$$\Rightarrow m\ddot{x} = F(x) \quad | \dot{x}$$

$$\Rightarrow m\dot{x}\ddot{x} = F \dot{x}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{x}^2 \right) = - \frac{dV(x(t))}{dt} \quad \text{mit } V(x) = - \int_{x_0 \text{ (beliebig)}}^x F(x') dx'$$

Wir betrachten nun die Arbeit, die nötig ist, um einen Massenpunkt um eine Strecke dx gegen eine äußere Kraft zu bewegen:

$$dW = -F dx \quad [W \text{ wegen } work]$$

2 Dynamik des Massenpunktes

Die Arbeit definieren wir als positiv, $dW > 0$, falls sie entgegen der Richtung der Kraft wirkt, d.h. falls $\text{sign } F = -\text{sign } dx$. Dann wird an dem Teilchen Arbeit geleistet. Andernfalls ist die Arbeit negativ, $dW < 0$, das Teilchen leistet Arbeit. Die Arbeit, die nötig ist, um das Teilchen auf einem endlichen Wegstück von x_1 nach x_2 zu bewegen, ist

$$W_{21} = - \int_{x_1}^{x_2} F(x') dx' = V(x_2) - V(x_1) \quad [V \text{ Potential oder potentielle Energie}]$$

also genau die Differenz des Potentials. Das Potential beschreibt die potentielle Möglichkeit des Teilchens, Arbeit zu leisten.

Beispiel Schwerefeld

$$\begin{aligned} F_g &= -mg \\ \Rightarrow V(x) &= mgx + C \\ \Rightarrow W_{21} &= V(x_2) - V(x_1) = mg(x_2 - x_1) \end{aligned}$$

Je höher das Teilchen, desto mehr Potential hat es. Ein Plot des Potentials entspricht genau dem Höhenprofil (bis auf eine beliebige additive Konstante).

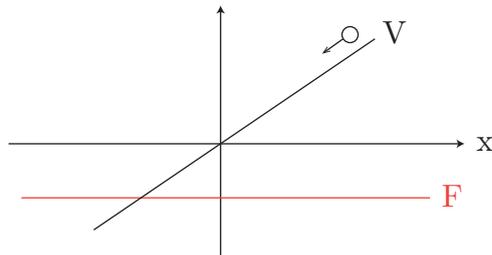


Abbildung 2.36: Schwerefeld: das Potential steigt mit der Höhe, die Kraft ist gerade der negative Gradient.

Eine Integration der Bewegungsgleichung ergibt

$$\underbrace{\frac{m}{2} \dot{x}^2}_{=: T} = -V(x) + \underbrace{E}_{\text{Integr.konst.}} \quad \left[\begin{array}{l} T \text{ kinet. Energie} \\ V \text{ pot. Energie} \\ E \text{ Gesamtenergie} \end{array} \right]$$

$$\Rightarrow \boxed{T + V = E} \quad \text{Energieerhaltung (für } F = F(x))$$

Für Kräfte, die nur vom Ort abhängen, ist die mechanische Energie erhalten. Das ist nicht der 1. Hauptsatz der Thermodynamik, der auch nicht-mechanische

2 Dynamik des Massenpunktes

Energieformen einschließt (Wärme), dann ist die Energie in jedem Fall erhalten. Energie, Arbeit und Potential haben die gleiche Einheit:

$$[E] = Nm = \frac{kg \ m^2}{s^2} = J \quad \text{Joule}$$

Die Energieerhaltung bedeutet eine starke Einschränkung der mögl. Teilchenbewegung, die man ohne Rechnung aus einem Plot des Potentials erschliessen kann. Wegen $T \geq 0$ sind Bereiche mit $V > E$ (klassisch) verboten (in der Quantenmechanik ist das anders). Die Punkte mit $E = V$ sind Umkehrpunkte mit $T = 0$ und deshalb $v = 0$. Die Extrema mit $V'(x) = 0$ sind mögliche Ruhepunkte. In einer Mulde um ein Minimum gibt es bei entsprechender kinetischer Energie *Oszillationen*. Wenn ein Teilchen gegen eine Potentialbarriere anläuft und dann umkehrt, spricht man von *Streuung* (in höheren Dimensionen würde das Teilchen typischerweise zur Seite weggestreut werden).

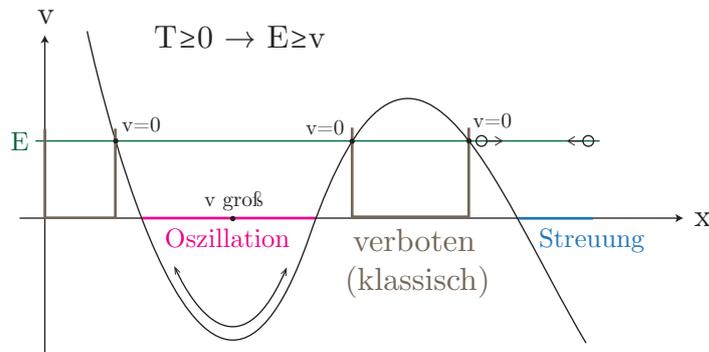


Abbildung 2.37: Aus der Potentiallandschaft kann die Teilchenbewegung qualitativ vorhergesagt werden.

Die Energieerhaltung erlaubt auch eine Lösung der Bewegungsgleichung:

$$\frac{m}{2} \dot{x}^2 = E - V(x) \Rightarrow \dot{x} = \sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}$$

Durch Separation der Variablen erhält man:

$$\frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}} = dt \Rightarrow t - t_0 = \int_{x_0}^x \frac{dx'}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x'))}}$$

Die allgemeine Lösung erhält man durch Auswertung des Integrals und Umkehrung von $t = t(x)$ nach $x = x(t)$.

2 Dynamik des Massenpunktes

Beispiel Harmonischer Oszillator

$$V(x) = \frac{1}{2}kx^2, \quad t_0 = 0, \quad x_0 = 0, \quad E = \frac{1}{2}mv_0^2$$

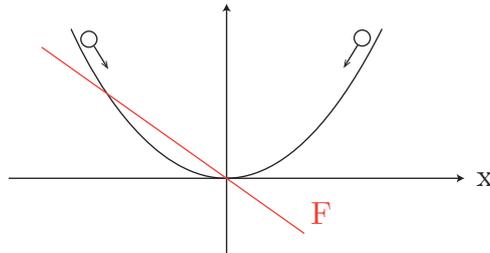


Abbildung 2.38: Harmonischer Oszillator

$$\Rightarrow t = \int_0^x \frac{dx'}{\sqrt{\frac{2}{m}(\frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}kx'^2)}} = \int_0^x \frac{dx'}{\sqrt{v_0^2 - \omega_0^2 x'^2}} = \int_0^x \frac{dx'}{v_0 \sqrt{1 - \frac{\omega_0^2}{v_0^2} x'^2}}$$

Mit der Variablensubstitution $u = \frac{\omega_0}{v_0} x'$, $dx' = \frac{v_0}{\omega_0} du$ ergibt sich:

$$t = \int_0^u \frac{\frac{v_0}{\omega_0} du}{v_0 \sqrt{1 - u^2}} = \int_0^u \frac{\frac{1}{\omega_0} du}{\sqrt{1 - u^2}} = \frac{1}{\omega_0} \arcsin u = \frac{1}{\omega_0} \arcsin \frac{\omega_0 x}{v_0}$$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)}$$

Das ist genau die Lösung, die wir für den harmonischen Oszillator mit den gegebenen Anfangsbedingungen ($x(0) = 0, v(0) = v_0$) schon berechnet haben.

Die Energieerhaltung gilt nicht mehr, wenn F von \dot{x} oder explizit von t abhängt.

Beispiel Harmonischer Oszillator mit Stokes'scher Reibung

$$m\ddot{x} = -kx - \zeta\dot{x} \quad | \cdot \dot{x}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \underbrace{\left[\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 \right]}_E = -\zeta\dot{x}^2 \leq 0$$

Die mechanische Gesamtenergie nimmt ab, bis das System zur Ruhe kommt.

2 Dynamik des Massenpunktes

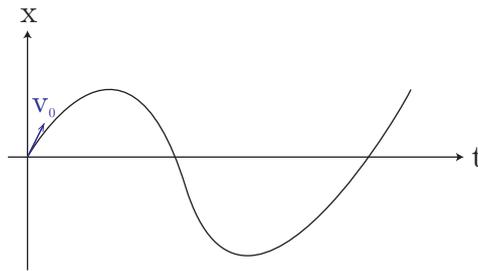


Abbildung 2.39: Bei den verwendeten Anfangsbedingungen für den harmonischen Oszillator ohne Reibung (also mit Energieerhaltung) ergibt sich eine reine Sinusschwingung.

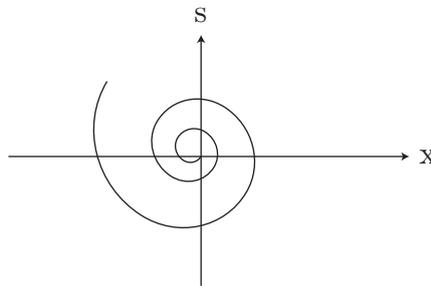


Abbildung 2.40: Phasenportrait des harmonischen Oszillators mit Reibung: das System verliert Energie, bis es zur Ruhe kommt.

Energie in 3D

Wir betrachten jetzt beliebige Kraftfelder $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$. Die Arbeit, um einen Massenpunkt von P_1 nach P_2 zu bringen, beträgt:

$$\boxed{W_{21} = - \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) \cdot d\mathbf{r}} \quad \text{Linien-, Weg- oder Kurvenintegral}$$

Um dieses Integral auszuwerten, benötigen wir eine parametrisierte Raumkurve $\mathbf{r}(\alpha)$. Dann gilt:

$$W_{21} = - \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \mathbf{F}(\mathbf{r}(\alpha), \dot{\mathbf{r}}(\alpha), t(\alpha)) \cdot \frac{d\mathbf{r}(\alpha)}{d\alpha} d\alpha \quad (\text{z.Bsp. } \alpha = t)$$

2 Dynamik des Massenpunktes

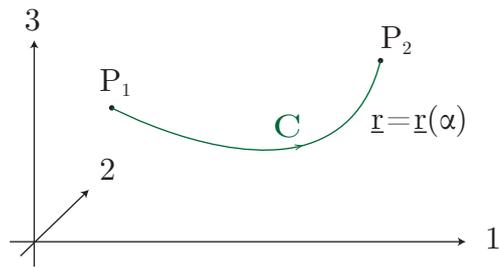


Abbildung 2.41: Der Weg zwischen zwei Punkten wird durch eine parametrisierte Raumkurve beschrieben.

Dieses Integral hängt im Allgemeinen ab von:

- | | |
|-------------------------|--|
| 1) Kraftfeld | } ⇒ $W_{21} \neq W_{21}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ |
| 2) Endpunkte P_1, P_2 | |
| 3) Bewegungszustand | |
| 4) Weg C | |

Beispiel für Wegabhängigkeit

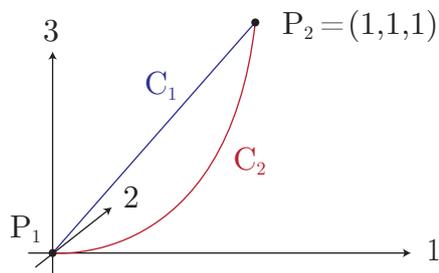


Abbildung 2.42: Unterschiedliche Wege mit unterschiedlichem Arbeitsintegral

$$C_1 : \mathbf{r}_\alpha = (\alpha, \alpha, \alpha) \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$

$$C_2 : \mathbf{r}_\alpha = (\alpha, \alpha^2, \alpha^3) \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 2x_1^2 - 3x_2 \\ 4x_2x_3 \\ 3x_1^2x_3 \end{pmatrix}$$

2 Dynamik des Massenpunktes

$$\begin{aligned}
 W_{C_1} &= - \int_0^1 \begin{pmatrix} 2\alpha^2 - 3\alpha \\ 4\alpha^2 \\ 3\alpha^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} d\alpha = - \int_0^1 (2\alpha^2 - 3\alpha + 4\alpha^2 + 3\alpha^3) d\alpha \\
 &= - \left[-\frac{3}{2}\alpha^2 + \frac{6}{3}\alpha^3 + \frac{4}{3}\alpha^4 \right]_0^1 = -\frac{5}{4}
 \end{aligned}$$

$$W_{C_2} = - \int_0^1 \begin{pmatrix} 2\alpha^2 - 3\alpha^2 \\ 4\alpha^5 \\ 3\alpha^5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2\alpha \\ 3\alpha^2 \end{pmatrix} = -\frac{325}{168}$$

$$\Rightarrow W_{C_1} = -\frac{5}{4} \neq -\frac{325}{168} = W_{C_2}$$

$$\Rightarrow \text{in 1D: } dW = -F dx$$

$$\text{in 3D: } \delta W = -\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad \text{kein totales Differential}$$

Wir betrachten die Bewegungsgleichung in 3D:

$$m\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} \quad | \quad \dot{\mathbf{r}}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2 \right) = \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{r}} = -\frac{dW}{dt} \quad \text{mit } W = - \int_{t_0}^t \mathbf{F}(\mathbf{r}(t'), \dot{\mathbf{r}}(t'), t') \cdot \dot{\mathbf{r}}(t') dt'$$

Formal sieht das aus wie in 1D, aber das Arbeitsintegral kann jetzt vom Weg abhängen. Nur für eine bestimmte Unterklasse von Kraftfeldern gibt es keine Wegabhängigkeit. Dies sind die *konservativen* Kräfte, für die es ein skalares Feld $V(\mathbf{r})$ gibt, so dass:

$$\boxed{\mathbf{F} = -\nabla V(\mathbf{r})}$$

$$\Rightarrow \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{r}} = -\nabla V(\mathbf{r}) \cdot \dot{\mathbf{r}} = - \left(\frac{\partial V}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial V}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} + \frac{\partial V}{\partial x_3} \frac{dx_3}{dt} \right) = -\frac{dV}{dt}$$

$$\Rightarrow W_{21} = - \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{r}} dt = V(\mathbf{r}_2) - V(\mathbf{r}_1)$$

Die Arbeit hängt somit nur von den Endpunkten des Weges ab, sie ist also wegunabhängig.

$$\Rightarrow \dot{T}(\dot{\mathbf{r}}) + \dot{V}(\mathbf{r}) = 0 \quad T = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2$$

2 Dynamik des Massenpunktes

$$\Rightarrow \boxed{T + V = E = \text{const.}}$$

Für konservative Kräfte gilt also wieder die Energieerhaltung. Kräfte sind entweder *konservativ* ($\dot{E} = 0$) oder *dissipativ* ($\dot{E} \neq 0$), d.h.

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{\text{kons}} + \mathbf{F}_{\text{diss}}$$

$$\Rightarrow \dot{E} = \dot{T} + \dot{V} = \mathbf{F}_{\text{diss}} \cdot \dot{\mathbf{r}}$$

Konservative Kräfte $\mathbf{F} = -\nabla V(\mathbf{r})$ dürfen nicht von $\dot{\mathbf{r}}$ oder t abhängen. Deshalb sind Reibungskräfte oder explizit zeitabhängige äußere Kräfte dissipativ. Es stellt sich nun die Frage, wie man konservative Kräfte erkennt. Dafür gibt es verschiedene Kriterien, die nun im Folgenden aufgelistet werden. Es ist zu beachten, dass alle Kriterien äquivalent zueinander sind.

- 1) $\mathbf{F} = -\nabla V(\mathbf{r})$
- 2) $\mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{r}} = -\frac{dV(\mathbf{r}(t))}{dt}$
- 3) $\nabla \times \mathbf{F} = \text{rot } \mathbf{F} = -(\nabla \times \nabla V) = \mathbf{0}$
- 4) Wegunabhängigkeit

Wegen

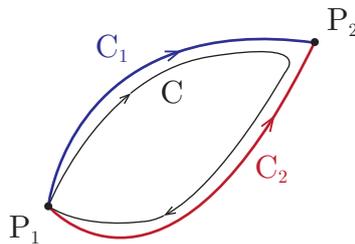


Abbildung 2.43: Der geschlossener Weg C kann in zwei Teilstrecken zerlegt werden.

$$0 = \oint_C dV = \oint_C \nabla V \cdot d\mathbf{r} = - \underbrace{\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}}_{\text{Arbeit}}$$

leistet ein konservatives Feld auf einem geschlossenen Weg keine Arbeit.

$$\Rightarrow 0 = - \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \int_{-C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

$$\Rightarrow - \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

D.h. die Arbeit von P_1 nach P_2 ist wegunabhängig.

Beispiele für konservative Kräfte

1. Homogenes Kraftfeld (z.Bsp. Schwerfeld)

$$\mathbf{F} = \mathbf{A} = \text{const.} \Rightarrow V(\mathbf{r}) = -\mathbf{A} \cdot \mathbf{r}$$

Speziell beim Schwerfeld ergibt sich:

$$\mathbf{F}_G = \mathbf{A} = m\mathbf{g} = m \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow V(\mathbf{r}) = -m \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = mgx_3$$

2. radialsymmetrisches Zentralfeld

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = f(r)\mathbf{e}_r$$

$$V(r) = - \int_{r_0}^r f(r') dr'$$

Diese Stammfunktion in 1D existiert immer.

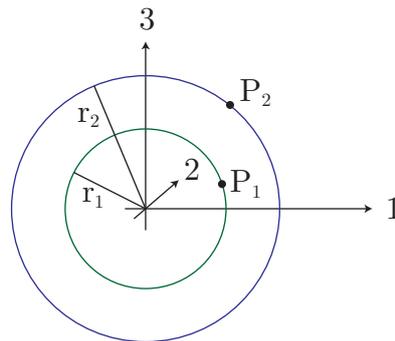


Abbildung 2.44: Ein radialsymmetrisches Potential hängt nur vom Radiusbetrag ab, ist also konstant auf Kugelschalen.

$$\Rightarrow F = -\nabla V(r) = - \underbrace{\frac{dV}{dr}}_{-f(r)} \underbrace{\nabla r}_{\mathbf{e}_r} = f(r)\mathbf{e}_r \quad \checkmark$$

Dieses Kraftfeld ist immer konservativ, da $V(r)$ immer existiert.

Wichtige physikalische Fälle sind:

- a) Gravitations- bzw Coulombkraft: $V(r) = -\frac{\alpha}{r}$
- b) Harmonische Kraft: $V(r) = \frac{1}{2}kr^2$

2 Dynamik des Massenpunktes

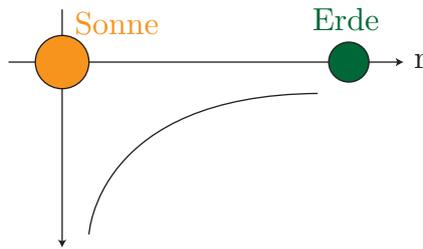


Abbildung 2.45: Die Gravitationskraft zwischen Sonne und Erde ist konservativ.

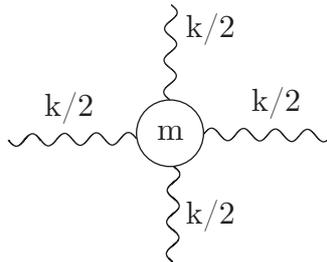


Abbildung 2.46: Die harmonische Kraft in einem Federsystem ist konservativ.

Drehimpuls in 3D

$$m \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} \quad | \quad \mathbf{r} \times \dot{}$$

$$\Rightarrow m(\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}}) = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

Links steht wieder eine Zeitableitung.

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = m \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) = m(\underbrace{\dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}}}_0 + \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}}) = m \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}}$$

$$\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{r}} \quad \text{Impuls, } \mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \quad \text{Drehimpuls, } \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{M} \quad \text{Drehmoment}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}} \quad \text{Drehimpulssatz}$$

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{0} \quad \text{Drehimpulserhaltung für } \mathbf{M} = \mathbf{0}$$

Dies kann in zwei Fällen vorliegen:

$$1) \mathbf{F} = \mathbf{0} \quad (\text{trivial}) \qquad 2) \mathbf{F} \parallel \mathbf{r} \quad (\text{Zentralfeld})$$

Somit gilt für radialsymmetrische Zentralfelder sowohl Energie- als auch Drehimpulserhaltung.

2.9 Die drei Kepler'schen Gesetze

Die drei folgenden Gesetze sind nach dem Astronomen JOHANNES KEPLER (1571-1630) benannt und waren einer der Ausgangspunkte für Newtons Entdeckung des Gravitationsgesetzes:

1. Die Planetenbahnen sind Ellipsen, mit der Sonne in einem der beiden Brennpunkte.
2. Der Fahrstrahl überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.
3. Die Quadrate der Umlaufzeiten verhalten sich wie die Kuben der großen Halbachsen.

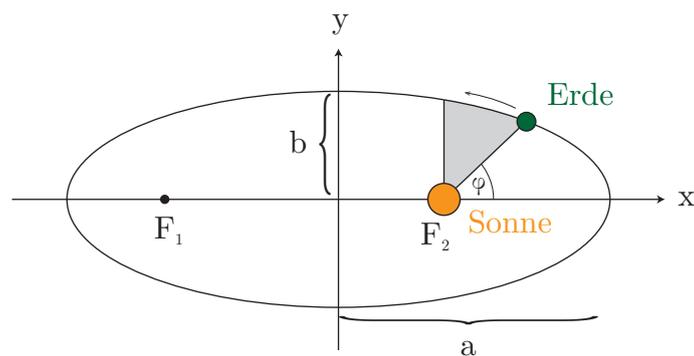


Abbildung 2.47:

Wie wir unten sehen werden, sind diese drei Gesetze eine Konsequenz von Energie- und Drehimpulserhaltung, die für die Gravitationskraft gilt. Die Gravitationskraft zweier Massen berechnet sich nach Newton durch:

$$\mathbf{F}_G = -\frac{m_1 m_2 \gamma}{r^2} \mathbf{e}_r = -\frac{\alpha}{r^2} \mathbf{e}_r$$

m_1, m_2	Massen
γ	Gravitationskonstante
r	Abstand der Massen

Dieses Kraftfeld besitzt ein Potential:

$$\mathbf{F}_G = -\nabla V(r) \text{ mit } V(r) = -\frac{\alpha}{r}$$

Es handelt sich also um ein konservatives System, deshalb gilt Energieerhaltung, $T + V = E = \text{const}$. Da die Gravitationskraft ausserdem eine Zentralkraft ist, gilt mit $\mathbf{M} = \mathbf{0}$ auch Drehimpulserhaltung, $\mathbf{L} = \text{const}$. Eine unmittelbare Konsequenz der Drehimpulserhaltung ist es, dass die Bewegung in einer Ebene erfolgt:

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{L} = m \mathbf{r}(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) = 0$$

Das ist die Bestimmungsgleichung für eine Ebene. Da \mathbf{L} konstant ist, ändert sich diese Ebene nicht.

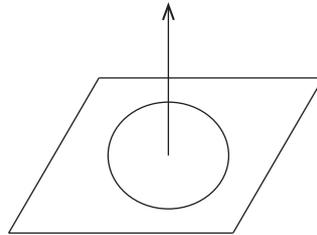


Abbildung 2.48:

2. Kepler'sches Gesetz (Flächensatz)

Für die vom Fahrstrahl überstrichene Fläche gilt:

$$\begin{aligned} dS &= \frac{1}{2} |\mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}(t+dt)| = |\mathbf{r}(t) \times (\mathbf{r}(t) + \dot{\mathbf{r}}(t)dt)| \\ &= \frac{1}{2} |\mathbf{r}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t)| dt \end{aligned}$$

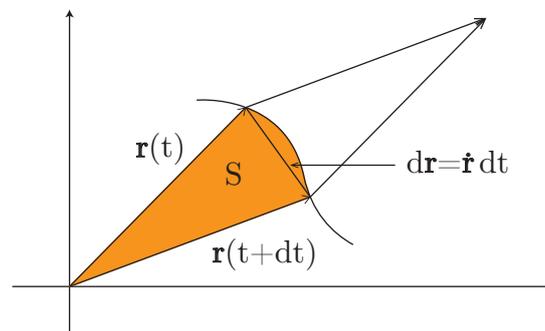


Abbildung 2.49:

Damit folgt:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2m} |\mathbf{L}| \quad \checkmark$$

1. Kepler'sches Gesetz (Ellipsensatz)

Wir betrachten jetzt die Bewegungsgleichung in der Ebene. Dazu bieten sich Polarkoordinaten an:

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &= r \mathbf{e}_r \\ \dot{\mathbf{r}} &= \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi\end{aligned}$$

Damit folgt für den Drehimpuls:

$$\begin{aligned}\mathbf{L} &= m (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) \\ &= m (r \mathbf{e}_r \times r \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi) \\ &= m r^2 \dot{\varphi} \mathbf{e}_z\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{L^2 = m^2 r^4 \dot{\varphi}^2}$$

Unter Verwendung dieser Beziehung ergibt sich für die Energie:

$$E = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 + V(r) = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) + V(r) = \frac{m}{2} \dot{r}^2 + V_{\text{eff}}(r)$$

$$\text{mit } \boxed{V_{\text{eff}}(r) = V(r) + \frac{m}{2} r^2 \dot{\varphi}^2 = V(r) + \frac{L^2}{2mr^2}}$$

Damit haben wir effektiv ein 1D-Problem erhalten, die Winkelanteile sind auf-

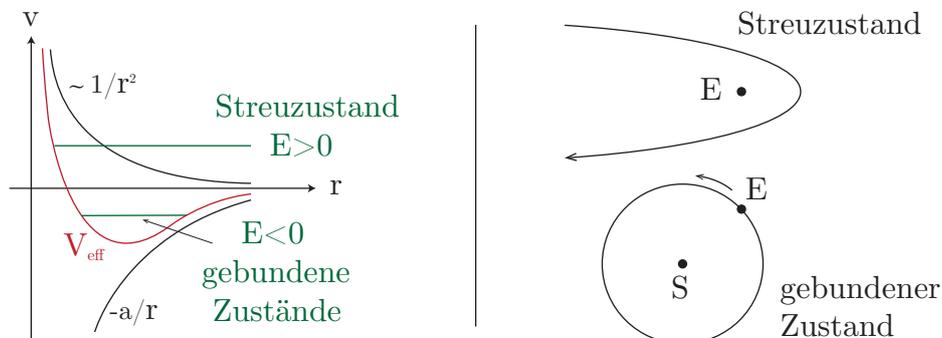


Abbildung 2.50:

grund der Drehimpulserhaltung eliminiert. Der dadurch entstehende Term heisst *Zentrifugalbarriere*, da er das Teilchen vom Ursprung fern hält. Die Lösung erfolgt formal wie beim Vorgehen im 1D-Fall:

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m} (E - V_{\text{eff}}(r))} = \frac{dr}{dt}$$

2 Dynamik des Massenpunktes

$$\Rightarrow t - t_0 = \int_{r_0}^r \frac{dr'}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V_{\text{eff}}(r))}} \quad \Rightarrow r = r(t) \text{ nach Umkehrung}$$

Für $\varphi = \varphi(t)$ gibt es eine analoge Formel. Allerdings sind dies aufgrund der Form von $V_{\text{eff}}(r)$ sehr komplizierte Integrale.

Dehalb ist die Lösung einfacher mit folgendem Vorgehen:

- Betrachte $r = r(\varphi)$ statt $r = r(t)$. Damit wird der Fokus weniger auf die Dynamik als vielmehr auf die Geometrie der Bahnkurve gelegt.
- Betrachte $s = \frac{1}{r} = s(\varphi)$. Das effektive Potential wird dann ein Polynom von s .

$$\frac{ds}{d\varphi} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{r} \right) \frac{dt}{d\varphi} = -\frac{\dot{r}}{r^2} \frac{1}{\dot{\varphi}} = -\frac{\dot{r}}{r^2} \frac{mr^2}{L} = -\dot{r} \frac{m}{L}$$

$$\Rightarrow \dot{r} = -\frac{L}{m} \frac{ds}{d\varphi}$$

$$\Rightarrow E = \frac{m}{2} \dot{r}^2 + \frac{L}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r} = \frac{L^2}{2m} \left[\left(\frac{ds}{d\varphi} \right)^2 + s^2 \right] - \alpha s$$

Hier bedienen wir uns eines kleinen Tricks: Wir differenzieren obige Gleichung auf beiden Seiten nach φ :

$$\Rightarrow 0 = \frac{L^2}{2m} \left[2 \frac{ds}{d\varphi} \frac{d^2s}{d\varphi^2} + 2s \frac{ds}{d\varphi} \right] - \alpha \frac{ds}{d\varphi}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d^2s}{d\varphi^2} + s = \frac{\alpha m}{L^2} =: \frac{1}{k}}$$

Dies ist die Differentialgleichung eines harmonischen Oszillators mit konstanter äußerer Kraft. Die allgemeine Lösung ist uns also schon bekannt:

$$s(\varphi) = \underbrace{A \sin \varphi + B \cos \varphi}_{\text{allg. Lsg. der hom. Dgl.}} + \underbrace{\frac{1}{k}}_{\text{spez. Lsg. der inhom. Dgl.}}$$

Die Konstanten A und B folgen aus den Anfangsbedingungen. Wir wählen das Koordinatensystem so, dass der sonnennächste Punkt (r minimal, s maximal) bei $\varphi = 0$ liegt.

$$\Rightarrow \left. \frac{ds}{d\varphi} \right|_{\varphi=0} = 0 = A$$

Mit $\varepsilon := kB$ ergibt sich:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{k} (1 + \varepsilon \cos \varphi)$$

2 Dynamik des Massenpunktes

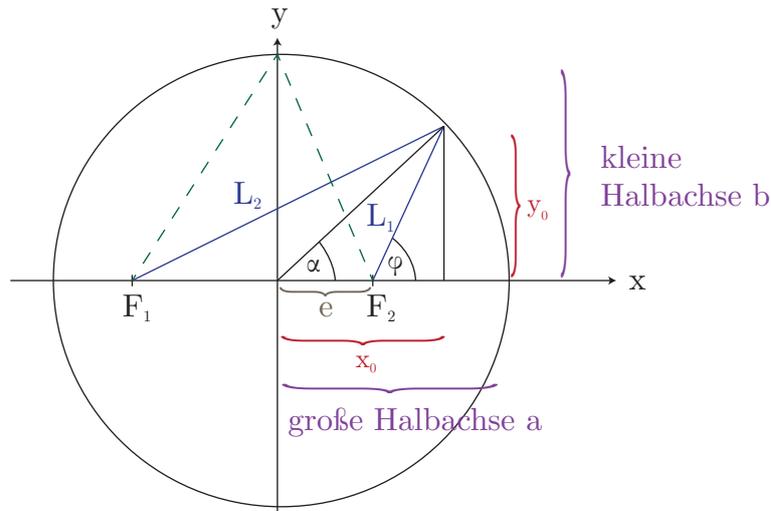


Abbildung 2.51:

Im folgenden werden wir zeigen, dass dies für $0 < \varepsilon < 1$ die Bestimmungsgleichung für eine Ellipse ist.

Eine Ellipse ist dadurch charakterisiert, dass für ihre Punkte die Summe der Abstände zweier Brennpunkte konstant ist. Am sonnennächsten Punkt findet man

$$L_1 + L_2 = 2a$$

Am obersten Punkt findet man

$$a^2 = e^2 + b^2$$

Kartesische Koordinaten: Wechsel vom Brenn- zum Mittelpunkt

$$y^2 + (x - e)^2 = L_1^2$$

$$y^2 + (x + e)^2 = L_2^2$$

Aus diesen zwei Gleichungen wollen wir nun eine Beschreibung der Ellipse mittels kartesischer Koordinaten herleiten.

Die Subtraktion beider Gleichungen ergibt:

$$L_2^2 - L_1^2 = 4ex = \underbrace{(L_2 + L_1)}_{2a}(L_2 - L_1) \Rightarrow L_2 - L_1 = \frac{2ex}{a}$$

Quadratur beider Seiten liefert:

$$L_2^2 + L_1^2 - 2L_2L_1 = \frac{4e^2x^2}{a^2} \quad (1)$$

2 Dynamik des Massenpunktes

Ferner gilt wegen $L_1 + L_2 = 2a$:

$$(L_1 + L_2)^2 = 4a^2 \quad \Rightarrow \quad L_2^2 + L_1^2 + 2L_1L_2 = 4a^2 \quad (2)$$

Addition der Gleichungen (1) und (2) ergibt:

$$\begin{aligned} \frac{4e^2x^2}{a^2} + 4a^2 &= 2(L_1^2 + L_2^2) = 2(2y^2 + 2x^2 + 2e^2) \\ \Rightarrow a^2x^2 - e^2x^2 + a^2y^2 &= a^4 - a^2e^2 \end{aligned}$$

Unter Verwendung von $b^2 = a^2 - e^2$ erhält man die gesuchte *Mittelpunktsgleichung*:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

Damit ist auch klar, dass die Polarkoordinaten vom Mittelpunkt aus folgendermassen lauten:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \begin{pmatrix} a \cos \alpha \\ b \sin \alpha \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1 \quad \checkmark \end{aligned}$$

Für unsere Rechnung benötigen wir aber die Polarkoordinaten vom Brennpunkt aus: $r = r(\varphi)$ wobei $r = L_1$.

$$\begin{aligned} L_2^2 - L_1^2 &= 4ex = 2a(L_2 - L_1) \\ \Rightarrow L_1 &= L_2 - \frac{2ex}{a} = (2a - L_1) - \frac{2ex}{a} \\ \Rightarrow L_1 &= a - \frac{e}{a}x = a - \frac{e}{a}(e + L_1 \cos \varphi) \\ \Rightarrow L_1 \left(1 + \frac{e}{a} \cos \varphi\right) &= a - \frac{e^2}{a} = \frac{b^2}{a} \end{aligned}$$

Wir definieren:

$$\varepsilon := \frac{e}{a} \quad \text{Exzentrizität} \qquad k := \frac{b^2}{a}$$

Für die Exzentrizität gilt $0 < \varepsilon < 1$ (bei $\varepsilon \rightarrow 0$ nähert sich die Ellipse einem Kreis an und bei $\varepsilon \rightarrow 1$ einer unendlich langen Zigarre). Mit $r = L_1$ erhalten wir nun die gesuchte Ellipsengleichung:

$$\boxed{\frac{1}{r} = \frac{1}{k}(1 + \varepsilon \cos \varphi)} \quad \checkmark$$

2 Dynamik des Massenpunktes

Tatsächlich handelt es sich dabei um die allgemeine Gleichung für Kegelschnitte. Im Falle $\varepsilon > 1$ ergeben sich Hyperbeln und Parabeln, also die Streuzustände des Gravitationspotentials.

Die geometrischen Größen können nun mit den physikalischen Größen in Bezug gesetzt werden:

$$k = \frac{b^2}{a} = \frac{L^2}{\alpha m}$$

Energie am sonnennächsten Punkt: $r(\varphi = 0) = r_0 = a - e$.

$$\begin{aligned} E(\varphi = 0) &= \frac{L^2}{2m} \left[\left(\frac{ds}{d\varphi} \right)^2 + s^2 \right] - \alpha s = \frac{L^2}{2mr_0^2} - \frac{\alpha}{r_0} = \alpha \left(\frac{k}{2r_0^2} - \frac{1}{r_0} \right) \\ &= \alpha \left(\frac{a^2 - e^2}{2a(a-e)^2} - \frac{1}{a-e} \right) = -\frac{\alpha}{2a} < 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{a = -\frac{\alpha}{2E}, \quad b = \sqrt{\frac{L^2 a}{\alpha m}} = \frac{L}{\sqrt{-2mE}}}$$

Die große Halbachse a folgt also aus der mechanischen Gesamtenergie E . Da wir gebundene Zustände (Ellipsen) betrachten, gilt $E < 0$. Die kleine Halbachse b folgt dann mit dem Drehimpuls L .

3. Kepler'sches Gesetz

Dieses Gesetz folgt aus den ersten beiden. Wir werden das 2. Kepler'sche Gesetz auf die in einem Umlauf überstrichene Fläche S an:

$$S = \pi ab = T \frac{L}{2m}$$

wobei πab die Ellipsenfläche und T die Umlaufzeit ist.

$$\Rightarrow \frac{T^2}{a^3} = \frac{\pi^2 a^2 b^2 4m^2}{L^2 a^3} = \frac{4\pi^2 m^2 k}{L^2} = \frac{4\pi^2 m}{\alpha} = \frac{4\pi^2}{m_s \gamma} = \text{const.} \quad \checkmark$$

Mit der Sonnenmasse m_s und der Gravitationskonstante γ ist diese Konstante für alle Planeten gleich.

2.10 Annahme von Punktteilchen

Bisher haben wir nur die Wechselwirkung zwischen punktförmigen Massen betrachtet. Warum ist dies für ausgedehnte Körper wie Planeten überhaupt gerechtfertigt?

2 Dynamik des Massenpunktes

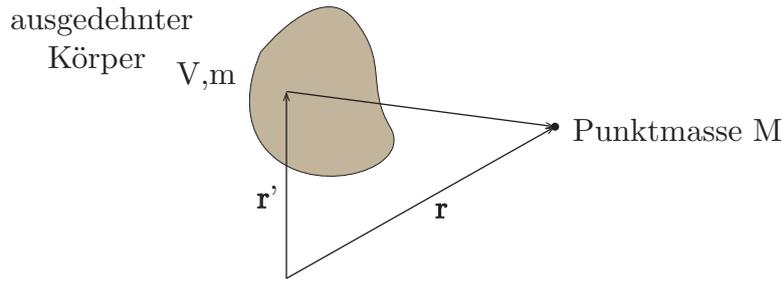


Abbildung 2.52: Gravitative Wechselwirkung zwischen einem ausgedehnten Körper und einer Punktmasse.

Sei $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ die Gravitationskraft, die ein ausgedehnter Körper auf eine Punktmasse mit Masse M an der Position \mathbf{r} ausübt. Wegen dem Superpositionsprinzip folgt diese als ein Volumenintegral über die Massenverteilung mit Dichte $\rho(\mathbf{r}')$ im ausgedehnten Körper:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \int dv' (-\gamma M \rho(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3})$$

Diese Kraft besitzt das Potential

$$V(\mathbf{r}) = \int dv' (-\gamma M \rho(\mathbf{r}') \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}), \quad \nabla V = -\mathbf{F}(\mathbf{r})$$

da Integral und Ableitung hier vertauschen. Man betrachte die Divergenz:

$$\nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\Delta V(\mathbf{r}) \stackrel{\text{ohne Beweis}}{=} -4\pi\gamma M \rho(\mathbf{r})$$

Der *Gauß'sche Satz* (benannt nach CARL FRIEDRICH GAUSS) besagt:

$$\int_{\partial V} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} = \int_V \nabla \mathbf{F} \cdot dV$$

Der Gauß'sche Satz erlaubt es uns also, ein Volumenintegral in ein Flächenintegral umzuwandeln. Das ist ähnlich wie beim Stokes'schen Satz, der ein Flächenintegral in ein Linienintegral umwandelt. Wir betrachten jetzt eine Kugel mit konstanter Dichte ρ_0 . Dann muss das Kraftfeld rotationssymmetrisch sein, $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = f(r)\mathbf{e}_r$. Die skalare Kraft $f(r)$ kann mit dem Gauß'schen Satz berechnet werden. Wir betrachten erst den Fall, dass der Massenpunkt ausserhalb der Kugel liegt, $r > R$:

$$\int \mathbf{F} d\mathbf{A} = \int f(r)\mathbf{e}_r r^2 d\Omega = 4\pi r^2 f(r) = \int \nabla \mathbf{F} dV = -4\pi\gamma M \underbrace{\rho_0 \frac{4\pi}{3} R^3}_m$$

2 Dynamik des Massenpunktes

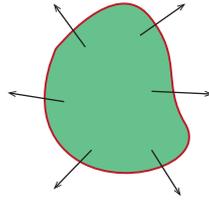


Abbildung 2.53: Nach Gauss kann das Flächenintegral über das Vektorfeld an der Oberfläche in ein Volumenintegral über den Körper umgewandelt werden.

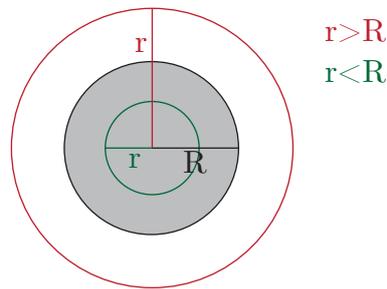


Abbildung 2.54: Geometrie für die Berechnung der Kraft: wir betrachten sowohl Massenpunkte ausserhalb als auch innerhalb der Kugel mit konstanter Dichte und Radius R .

$$\Rightarrow \boxed{f(r) = -\gamma M m \frac{1}{r^2}}$$

Die ausintegrierte Wechselwirkung ist also genau die, die auch zwischen zwei Punktteilchen herrscht. Das berechtigt zur Annahme, in der Planetenbewegung Punktteilchen anzunehmen.

Im Falle $r < R$ ist die Rechnung ganz ähnlich:

$$4\pi r^2 f(r) = -4\pi\gamma M \rho_0 \underbrace{\frac{4\pi}{3} r^3}_{m \frac{r^3}{R^3}} \frac{R^3}{R^3}$$

$$\Rightarrow \boxed{f(r) = -\gamma M m \frac{r}{R^3}}$$

Das wäre also zum Beispiel die Kraft, die ein Teilchen erfährt, das in einem Schacht in die Erde eingeführt wird. Die Wechselwirkung genau in der Mitte ($r = 0$) verschwindet, wie es aus Symmetriegründen auch sein muss. Sie steigt dann linear

2 Dynamik des Massenpunktes

mit r an, bis der Radius R erreicht ist (also für die Erde die Erdoberfläche). Dann fällt sie mit $f(r) \sim -1/r^2$ wie für ein Punktteilchen ab.

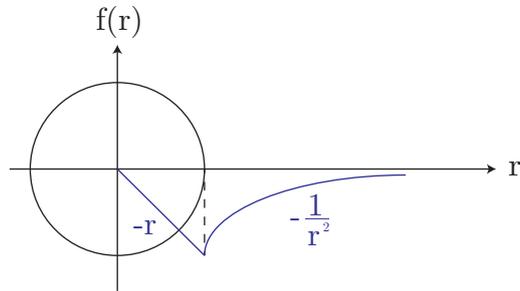


Abbildung 2.55: Die Wechselwirkung zwischen einem Punktteilchen und einer Kugel konstanter Dichte ist innerhalb der Kugel linear mit dem Abstand und geht dann in die Wechselwirkung zwischen zwei Punktteilchen über.

3 Mehrteilchensysteme

3.1 Motivation

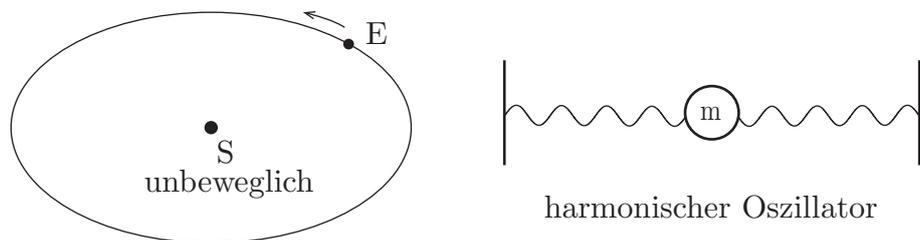


Abbildung 3.1: Die zwei wichtigsten Beispiele für Einteilchensysteme: Planetenbewegung um eine unbewegliche Sonne und der harmonische Oszillator.

Bisher haben wir in der Vorlesung nur Einteilchensysteme behandelt. Das war zum Beispiel die Bewegung der Erde um eine unbewegliche Sonne oder der harmonische Oszillator. Jetzt wenden wir uns den Mehrteilchensystemen zu. Zunächst werden verschiedene Mehrteilchensysteme vorgestellt:

a) **2-Körper-Probleme in der Astronomie**

Darunter versteht man das Problem der Berechnung der Bewegung zweier astronomischer Objekte, die sich aufgrund der Gravitation anziehen (z.Bsp. Doppelstern, Erde/Mond, Erde/Komet, Erde/Sonne). Dieses sog. *Kepler-Problem* wurde von Newton gelöst. Bei mehr als zwei Objekten erfolgt die Berechnung mittels Störungstheorie oder Numerik.

b) **Systeme mit sehr vielen Teilchen**

Bei Systemen mit sehr vielen Teilchen ($N \gg 1$) (z.Bsp. ein makroskopisches Volumen Gas mit $N = 6 \times 10^{23}$ Teilchen) sind exakte Ergebnisse über die Bewegung einzelner Teilchen weder möglich noch sinnvoll. In der *Statistischen Mechanik* werden deshalb Aussagen erarbeitet, die für Ensembles

3 Mehrteilchensysteme

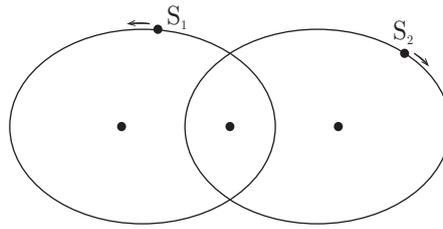


Abbildung 3.2: Beispiel für ein 2-Körper-Problem: beim Doppelstern sind die beiden Massen relativ ähnlich. Newton hat gezeigt dass sich auch für zwei Körper beide Massenpunkte auf Ellipsen bewegen.

gelten (insbes. Mittelwerte und typische Abweichungen davon). Die relevanten Potentiale können dabei sehr unterschiedlich sein, sind aber in der Regel konservative Zentralkräfte.

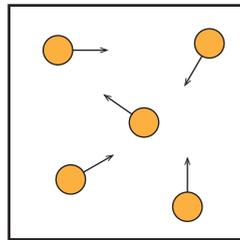


Abbildung 3.3: Die Statistische Mechanik beschäftigt sich mit Systemen mit sehr vielen Teilchen Teilchenbewegung, wie zum Beispiel einem Behälter mit Gas.

c) Federsysteme

Systeme von Massenpunkte, die durch Federn gekoppelt sind, kommen oft in technischen Anwendungen vor, sind aber auch Modelle für die *Molekülphysik* und die *molekulare Biophysik*. Das einfachste Beispiel ist die lineare Kette mit $N = 2$. Bei kleinen Auslenkungen ($\sin \varphi \approx \varphi$) ist die Bewegung des gekoppelten Pendels dazu äquivalent. Die lineare Kette mit $N = 3$ ist ein Modell für Kohlendioxid CO_2 .

d) Doppelpendel (N=2)

Schon das Doppelpendel kann zu scheinbar erratischen Bewegungen führen, die im Prinzip berechenbar sind, aber empfindlich von den Anfangsbedingungen abhängen (*deterministisches Chaos*). Die chaotische Bewegung des Doppelpendels wird in der *Nichtlinearen Dynamik* behandelt.

3 Mehrteilchensysteme

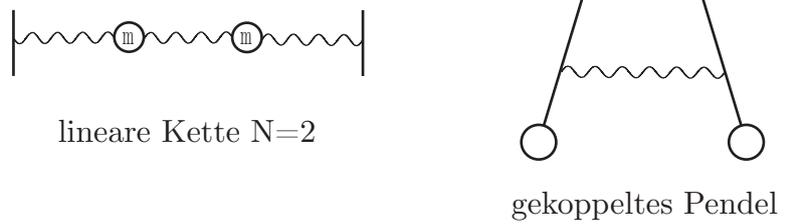


Abbildung 3.4: Das gekoppelte Pendel ist für kleine Auslenkungen äquivalent zur linearen Kette mit $N = 2$.

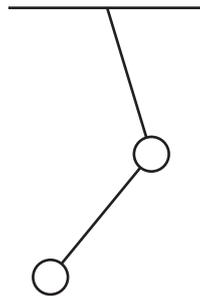


Abbildung 3.5: Das Doppelpendel hat eine chaotische Bewegung, die in der Nicht-linearen Dynamik untersucht wird.

e) Federsysteme mit vielen Teilchen

Modellsysteme wie der harmonische Kristall sind Thema der *Festkörperphysik*.

3.2 Notation

Wir betrachten ein System mit N Teilchen (z.Bsp.: Planetensystem, Molekül, Festkörper, Gas). Jedem Teilchen ordnen wir einen Index i zu ($1 \leq i \leq N$). Dies darf nicht verwechselt werden mit (x_1, x_2, x_3) für die Koordinaten. Die Koordinaten des i -ten Teilchen bezeichnen wir deshalb ab jetzt mit (x_i, y_i, z_i) . Ferner verwenden wir folgende Bezeichnungen:

- \mathbf{r}_i : Ortsvektor des i -ten Teilchens
- m_i : Masse des i -ten Teilchens
- \mathbf{F}_i : Gesamtkraft auf das i -te Teilchen
- \mathbf{F}_{ij} : Kraft des j -ten Teilchens auf das i -te Teilchen

3 Mehrteilchensysteme

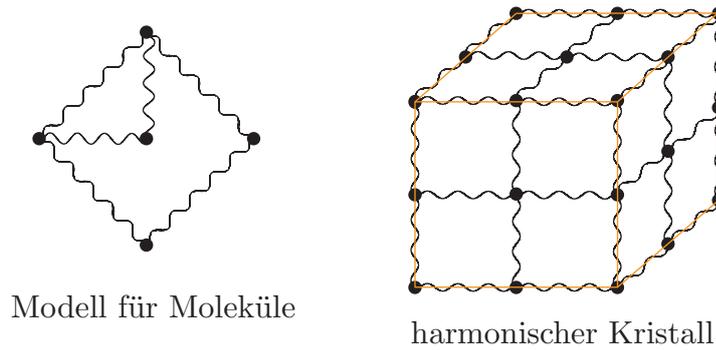


Abbildung 3.6: Federsysteme sind auch Modelle für Moleküle und Festkörper.

Die auf das i -te Teilchen wirkende Gesamtkraft \mathbf{F}_i ist dann:

$$\mathbf{F}_i = \underbrace{\mathbf{F}_i^{ext}}_{\text{äußere Kräfte}} + \underbrace{\sum_{j=1}^N \mathbf{F}_{ij}}_{\text{innere Kräfte}}$$

Ein System heißt *abgeschlossen*, wenn es keine äusseren Kräfte gibt, also $\mathbf{F}_i^{ext} = \mathbf{0}$.

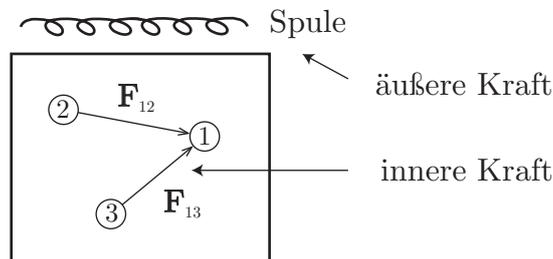


Abbildung 3.7: Auf Teilchen 1 wirken die inneren Kräfte von Teilchen 2 und 3 sowie äussere Kräfte, z.B. elektromagnetische Feldkräfte.

Anwendung des zweiten Newton'schen Gesetzes und des Superpositionsprinzips auf einen Massenpunkt liefert:

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^{ext} + \sum_{j=1}^N \mathbf{F}_{ij}$$

Das ist ein System von $3N$ gekoppelten gewöhnlichen Differentialgleichungen. Wenn die Teilchen ausserdem Ausdehnung haben, dann gibt es insgesamt $6N$

3 Mehrteilchensysteme

Freiheitsgrade (also nochmals so viele für die Orientierungen).

Das dritte Newton'sche Gesetz (*actio = reactio*) besagt für die inneren Kräfte:

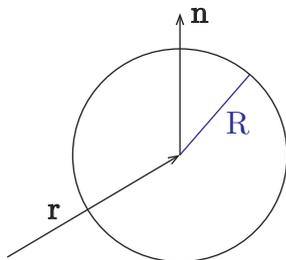


Abbildung 3.8: Teilchen mit Ausdehnung: neben dem Ortsvektor benötigen wir noch Winkel für die Orientierung.

$$\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji} \Rightarrow \mathbf{F}_{ii} = -\mathbf{F}_{ii} \Rightarrow \mathbf{F}_{ii} = \mathbf{0}$$

In der Newton'schen Mechanik kann also ein Teilchen keine Kraft aus sich selbst ausüben. Die Summe über die inneren Kräfte hat effektiv nur $N - 1$ Terme.

Beispiel Sonnensystem: Sonne, acht Planeten (*Mein Vater erklärt mir jeden Sonntag unsere Nachbarplaneten*), deren Monde, Astroiden, etc

$$\mathbf{F}_i^{ext} = 0, \quad \mathbf{F}_{ij} = -\gamma m_i m_j \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^3}$$

3.3 Erhaltungssätze

Impuls

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \mathbf{F}_{ij} = \sum_{i,j} \mathbf{F}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\sum_{i,j} \mathbf{F}_{ij} + \sum_{i,j} \mathbf{F}_{ji} \right) \stackrel{3. \text{ Gesetz}}{=} \frac{1}{2} \sum_{i,j} (\mathbf{F}_{ij} - \mathbf{F}_{ij}) = \mathbf{0}$$

Mit dem 2. Gesetz folgt dann:

$$\Rightarrow \sum_i m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_i \mathbf{F}_i^{ext} + \underbrace{\sum_{i,j} \mathbf{F}_{ij}}_{=0} = \sum_i \mathbf{F}_i^{ext} \quad (1)$$

3 Mehrteilchensysteme

Der Beitrag der inneren Kräfte fällt weg.

Definitionen:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^{ext} &:= \sum_i \mathbf{F}_i^{ext} && \text{Gesamtkraft} \\ M &:= \sum_i m_i && \text{Gesamtmasse} \\ \mathbf{R} &:= \frac{1}{M} \sum_i m_i \mathbf{r}_i && \text{Schwerpunkt} \end{aligned}$$

Mit diesen Definitionen lässt sich (1) kompakt schreiben:

$$\boxed{M\ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{F}^{ext}}$$

Schwerpunktsatz: Der Schwerpunkt bewegt sich so, als ob alle Masse in ihm

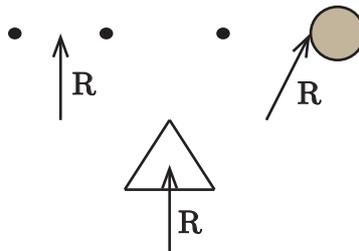


Abbildung 3.9: Schwerpunktsvektor für zwei gleich grosse Massen, zwei unterschiedliche Massen und eine kontinuierliche Massenverteilung in der Form eines Dreiecks.

vereint wäre und die äußere Gesamtkraft auf ihn wirkte. Die inneren Kräfte spielen hier keine Rolle. Im abgeschlossenen System ($\mathbf{F}^{ext} = \mathbf{0}$) bewegt sich der Schwerpunkt geradlinig-gleichförmig.

Definition:

$$\mathbf{P} := \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i \quad \text{Gesamtimpuls}$$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{\mathbf{P}} = M\ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{F}^{ext}}$$

Für ein abgeschlossenes System ergibt sich damit die Impulserhaltung:

$$\mathbf{F}^{ext} = \mathbf{0} \Rightarrow \dot{\mathbf{P}} = \mathbf{0}$$

Drehimpuls

Wir definieren den Gesamtdrehimpuls als Summe der Einzeldrehimpulse:

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \sum_i \mathbf{L}_i = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i = \sum_i m_i (\mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i) \\ \Rightarrow \dot{\mathbf{L}} &= \sum_i m_i [(\dot{\mathbf{r}}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i) + (\mathbf{r}_i \times \ddot{\mathbf{r}}_i)] = \sum_i (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i) \\ &= \sum_i (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{ext}) + \sum_{i,j} (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij}) \end{aligned}$$

Für Zentralkräfte ($\mathbf{F}_{ij} \parallel (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$) verschwindet der zweite Term:

$$\sum_{i,j} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} [(\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij}) + (\mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_{ji})] = \frac{1}{2} \sum_{i,j} (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \times \mathbf{F}_{ij} = \mathbf{0}$$

Damit folgt der Drehimpulssatz:

$$\Rightarrow \boxed{\dot{\mathbf{L}} = \sum_i (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{ext}) =: \mathbf{M}^{ext}} \quad [\mathbf{M}^{ext} \text{ Gesamtdrehmoment}]$$

Für ein abgeschlossenes System gilt Drehimpulserhaltung:

$$\mathbf{M}^{ext} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{L} = \text{const.}$$

Der Gesamtimpuls \mathbf{L} kann zerlegt werden in Schwerpunktsanteil \mathbf{L}_s und Relativanteil \mathbf{L}_r . Wir definieren Relativkoordinaten für jeden Massepunkt i :

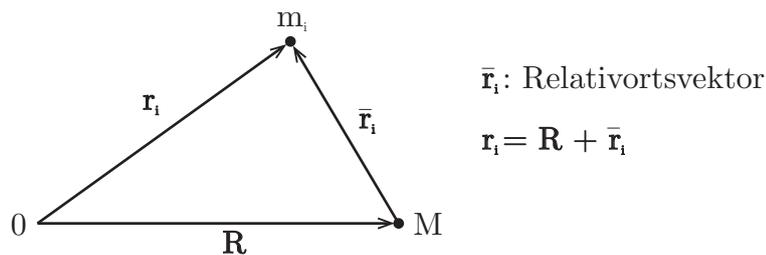


Abbildung 3.10: Definition von Relativkoordinaten

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{R} + \bar{\mathbf{r}}_i$$

3 Mehrteilchensysteme

Wegen

$$\sum_i m_i \bar{\mathbf{r}}_i = \sum_i m_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}) = M\mathbf{R} - M\mathbf{R} = \mathbf{0}$$

ergibt sich für die Zerlegung des Gesamtimpulses:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mathbf{L} &= \sum_i m_i (\mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i) = \sum_i m_i [(\mathbf{R} + \bar{\mathbf{r}}_i) \times (\dot{\mathbf{R}} + \dot{\bar{\mathbf{r}}}_i)] \\ &= \sum_i m_i [(\mathbf{R} \times \dot{\mathbf{R}}) + (\mathbf{R} \times \dot{\bar{\mathbf{r}}}_i) + (\bar{\mathbf{r}}_i \times \dot{\mathbf{R}}) + (\bar{\mathbf{r}}_i \times \dot{\bar{\mathbf{r}}}_i)] \\ &= \underbrace{M(\mathbf{R} \times \dot{\mathbf{R}})}_{\mathbf{L}_s} + (\mathbf{R} \times \underbrace{(\sum_i m_i \dot{\bar{\mathbf{r}}}_i)}_{=\mathbf{0}}) + (\underbrace{(\sum_i m_i \bar{\mathbf{r}}_i)}_{=\mathbf{0}} \times \dot{\mathbf{R}}) + \underbrace{\sum_i m_i (\bar{\mathbf{r}}_i \times \dot{\bar{\mathbf{r}}}_i)}_{\mathbf{L}_r} \end{aligned}$$

In kompakter Schreibweise:

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \mathbf{L}_s + \mathbf{L}_r \\ \mathbf{L}_s &= M(\mathbf{R} \times \dot{\mathbf{R}}) = \mathbf{R} \times \mathbf{P} \\ \mathbf{L}_r &= \sum_i m_i (\bar{\mathbf{r}}_i \times \dot{\bar{\mathbf{r}}}_i) \end{aligned}$$

Vergleich mit dem Impuls:

$$\mathbf{P} = \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i = \sum_i m_i (\dot{\mathbf{R}} + \underbrace{\dot{\bar{\mathbf{r}}}_i}_{=\mathbf{0}}) = M\dot{\mathbf{R}}$$

Der Gesamtimpuls hat nur einen Schwerpunktsanteil.

Energie

Zunächst multiplizieren die Bewegungsgleichung eines einzelnen Massenpunktes skalar mit $\dot{\mathbf{r}}_i$ und summieren anschließend über i . Es ergibt sich:

$$\sum_i m_i (\ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i) = \frac{d}{dt} \underbrace{\left(\frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 \right)}_{=T \text{ kinet. Energie}} = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i$$

Wir unterscheiden zwischen konservativen und dissipativen Kräften:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_i &= -\nabla_i V(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) + \mathbf{F}^{dis} && [\nabla_i \text{ Gradient für das } i\text{-te Teilchen}] \\ \Rightarrow \frac{dV}{dt} &= \sum_i (\nabla_i V) \cdot \dot{\mathbf{r}}_i \end{aligned}$$

3 Mehrteilchensysteme

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt}(T + V) = \sum_i \mathbf{F}_i^{dis} \cdot \dot{\mathbf{r}}_i} \quad \text{Energiesatz}$$

Im Falle eines konservativen Systems folgt:

$$T + V = E = \text{const.} \quad \text{Die Gesamtenergie ist erhalten.}$$

Definitionen:

$$x_{ij} = x_i - x_j, \quad y_{ij} = y_i - y_j, \quad z_{ij} = z_i - z_j$$

$$\nabla_{ij} = \left(\frac{\partial}{\partial x_{ij}}, \frac{\partial}{\partial y_{ij}}, \frac{\partial}{\partial z_{ij}} \right)$$

Typischerweise haben wir für die inneren Kräfte konservative Zentralkräfte, d.h. es gibt Zwei-Körper-Potentiale, die nur vom Betrag des Abstandes abhängen:

$$V_{ij} = V_{ij}(r_{ij}) \quad \text{mit } r_{ij} = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|$$

$$\Rightarrow \mathbf{F}_{ij} = -\nabla_i V_{ij} = -\nabla_{ij} V_{ij} = +\nabla_{ji} V_{ij} = \nabla_j V_{ij} = -\mathbf{F}_{ji} = \nabla_j V_{ji}$$

$$\Rightarrow V_{ij} = V_{ji}, \quad V_{ii} = 0 \quad (\mathbf{F}_{ii} = 0)$$

Die Matrix der Zwei-Körper-Potentiale ist also symmetrisch und hat eine verschwindende Diagonale. Für die Energieerhaltung bezüglich der inneren Kräfte haben wir dann:

$$\begin{aligned} \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i &= \sum_{i,j} \mathbf{F}_{ij} \cdot \dot{\mathbf{r}}_i = \frac{1}{2} \sum_{i,j} (\mathbf{F}_{ij} \cdot \dot{\mathbf{r}}_i + \mathbf{F}_{ji} \cdot \dot{\mathbf{r}}_j) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \mathbf{F}_{ij} \cdot \dot{\mathbf{r}}_{ij} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j} (-\nabla_{ij} V_{ij}) \cdot \dot{\mathbf{r}}_{ij} = -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sum_{i,j} V_{ij} \end{aligned}$$

Wir nehmen an, dass auch die externe Kraft konservativ ist:

$$\Rightarrow \mathbf{F}_i^{ext} = -\nabla_i V_i^{ext}(\mathbf{r}_i) = -\nabla V^{ext}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n) \quad \text{mit } V^{ext} = \sum_i V_i^{ext}$$

Damit haben wir:

$$\sum_i \mathbf{F}_i^{ext} \cdot \dot{\mathbf{r}}_i = -\frac{d}{dt} \sum_i V_i^{ext}$$

Für das Gesamtpotential folgt also:

$$\Rightarrow \boxed{\underbrace{V(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)}_{\text{Gesamtpotential}} = \underbrace{\sum_i V_i^{ext}(\mathbf{r}_i)}_{V^{ext}} + \frac{1}{2} \underbrace{\sum_{i,j} V_{ij}}_{\sum_{i < j} V_{ij}}}$$

Dieses Ergebnis macht Sinn, jedes Paarpotential kommt effektiv nur einmal vor.

Virial

Wie groß sind die relativen Beträge von kinetischer und potentieller Energie zur Gesamtenergie? Diese Frage kann für das zeitliche Mittel beantwortet werden! Wir betrachten im folgenden nur konservative Kräfte. Wir multiplizieren die Bewegungsgleichung skalar mit \mathbf{r}_i und summieren auf:

$$\Rightarrow \sum_i m_i (\ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \mathbf{r}_i) = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i = \underbrace{\frac{d}{dt} \sum_i m_i (\dot{\mathbf{r}}_i \cdot \mathbf{r}_i)}_{\text{verschwindet idR im zeitl. Mittel}} - \underbrace{\sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2}_{=2T}$$

Der zeitl. Mittelwert einer Funktion $f(t)$ ist definiert durch:

$$\begin{aligned} \langle f \rangle &:= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau f(t) dt \\ \Rightarrow \left\langle \frac{d}{dt} \sum_i m_i (\dot{\mathbf{r}}_i \cdot \mathbf{r}_i) \right\rangle &= \frac{1}{\tau} \left[\underbrace{\sum_i m_i (\dot{\mathbf{r}}_i \cdot \mathbf{r}_i)}_{(*)} \right]_0^\tau \rightarrow 0 \quad (\text{wenn } (*) \text{ endlich}) \end{aligned}$$

Dies ist z.Bsp. der Fall bei gebundener Bewegung (Planeten, Federn) aber nicht bei Streuung.

$$\Rightarrow \boxed{\langle T \rangle = \frac{1}{2} \left\langle \underbrace{\sum_i (\nabla_i V \cdot \mathbf{r}_i)}_{\text{Virial}} \right\rangle} \quad \text{Virialsatz}$$

Die kinetische Energie ist im zeitlichen Mittel gleich dem halben Virial.
Spezialfall: *homogene* Potentiale vom Grad k

$$V(\alpha \mathbf{r}_1, \dots, \alpha \mathbf{r}_N) = \alpha^k V(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha} V(\alpha \mathbf{r}_1, \dots, \alpha \mathbf{r}_N) &= k \alpha^{k-1} V(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = \frac{\partial V}{\partial(\alpha \mathbf{r}_i)} \cdot \frac{\partial(\alpha \mathbf{r}_i)}{\partial \alpha} \\ &= \sum_i \frac{\partial V}{\partial(\alpha \mathbf{r}_i)} \cdot \mathbf{r}_i \end{aligned}$$

$$\stackrel{\alpha=1}{\Rightarrow} kV = \sum_i \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}_i} \cdot \mathbf{r}_i$$

$$\Rightarrow \boxed{\langle T \rangle = \frac{1}{2} k \langle V \rangle} \quad \text{Virialsatz für homogene Potentiale}$$

Beispiele

3 Mehrteilchensysteme

1. Federn

$$V_{ij} = \frac{1}{2} k_{ij} r_{ij}^2$$

$$\Rightarrow k = 2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\langle T \rangle = \langle V \rangle}$$

Es ist genau gleich viel Energie in kinetischer und potentieller Energie gespeichert. Das gilt insbesondere für Moleküle oder Festkörper.

2. Gravitation

$$V_{ij} = -\gamma m_i m_j \frac{1}{r_{ij}}$$

$$\Rightarrow k = -1$$

$$\Rightarrow 2 \langle T \rangle = - \langle V \rangle = -(E - \langle T \rangle)$$

$$\Rightarrow \langle T \rangle = -E \quad (E < 0 \text{ wegen gebundener Bewegung})$$

$$\langle V \rangle = 2E \Rightarrow |\langle V \rangle| = 2 |\langle T \rangle|$$

Es ist zweimal so viel Energie in potentieller Energie gespeichert wie in kinetischer Energie.

3.4 Zwei-Teilchen-Systeme

Wir werden uns im folgenden als Spezialfall der Mehrteilchensysteme den Zwei-Teilchen-Systeme ($N=2$) zuwenden. Wir definieren Schwerpunkts- und Relativko-

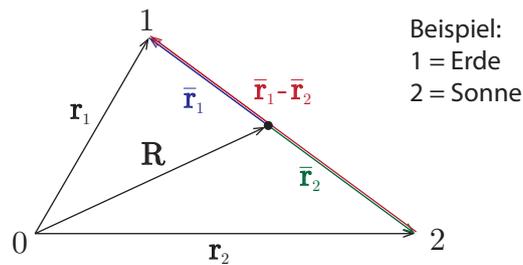


Abbildung 3.11: Ortsvektoren im Zwei-Teilchen-System, Definition von Schwerpunkts- und Relativkoordinaten

ordinaten:

$$\mathbf{R} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$$

3 Mehrteilchensysteme

$$\Rightarrow \mathbf{r}_1 = \mathbf{R} + \underbrace{\frac{m_2}{M}}_{\mathbf{r}_1} \mathbf{r}, \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{R} - \underbrace{\frac{m_1}{M}}_{\mathbf{r}_2} \mathbf{r}$$

Zur Positionsbeschreibung der Massenpunkte sind $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ und (\mathbf{R}, \mathbf{r}) also äquivalent. Wie lauten die Bewegungsgleichungen für \mathbf{R} und \mathbf{r} ?

Schwerpunktsatz für abgeschlossene Systeme:

$$\boxed{M\ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{F}^{ext} = \mathbf{0}}$$

Relativbewegung:

$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{r}}_1 - \ddot{\mathbf{r}}_2 = \frac{\mathbf{F}_1^{ext}}{m_1} - \frac{\mathbf{F}_2^{ext}}{m_2} + \frac{\mathbf{F}_{12}}{m_1} - \frac{\mathbf{F}_{21}}{m_2} = \frac{\mathbf{F}_1^{ext}}{m_1} - \frac{\mathbf{F}_2^{ext}}{m_2} + \underbrace{\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)}_{=:\frac{1}{\mu}} \mathbf{F}_{12}$$

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 m_2}{M} \quad \text{reduzierte Masse}$$

In einem abgeschlossenen System gilt also für den Relativvektor:

$$\boxed{\mu \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}_{12}}$$

Die zwei Bewegungsgleichungen sind also entkoppelt und man erhält effektiv ein Ein-Teilchen-System. Die Erhaltungssätze sind demnach wie in Kapitel 2 (*Dynamik des Massenpunktes*).

Kinetische Energie:

$$\begin{aligned} T &= \sum_{i=1,2} \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 = \frac{1}{2} m_1 \left(\dot{\mathbf{R}} + \frac{m_2}{M} \dot{\mathbf{r}}\right)^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\dot{\mathbf{R}} - \frac{m_1}{M} \dot{\mathbf{r}}\right)^2 \\ &= \underbrace{\frac{1}{2} M \dot{\mathbf{R}}^2}_{T_s} + \underbrace{\frac{1}{2} \mu \dot{\mathbf{r}}^2}_{T_r} \quad (\text{gemischte Terme verschwinden}) \end{aligned}$$

Drehimpuls:

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \mathbf{L}_s + \mathbf{L}_r \\ \mathbf{L}_s &= M(\mathbf{R} \times \dot{\mathbf{R}}) = \mathbf{R} \times \mathbf{P} \\ \mathbf{L}_r &= \sum_{i=1,2} m_i (\tilde{\mathbf{r}}_i \times \dot{\tilde{\mathbf{r}}}_i) = \mu(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) \end{aligned}$$

Potentielle Energie:

$$V = \mathbf{V}_r = V_{12}$$

3 Mehrteilchensysteme

Theorem (Bertrand): Stabile, geschlossene Bahnkurven gibt es nur für die Potentiale $-\frac{\alpha}{r}$ und $\frac{1}{2}kr^2$.

Definition: Systeme, die sich durch Erhaltungssätze auf eindimensionale Integrale reduzieren lassen, heißen *vollständig integabel*. Das gilt für das Zwei-, aber nicht für das Drei-Körper-Problem.

3.5 Kepler-Problem

Zwei-Körper-Problem mit der Gravitationskraft als wirkende Kraft zwischen den zwei Massenpunkten.

$$\begin{aligned} V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) &= V_{12}(r) = -\frac{\gamma m_1 m_2}{r} \\ \Rightarrow \mathbf{F}_{12} &= -\nabla_1 V_{12} = -\nabla_{12} V_{12} = -\gamma m_1 m_2 \frac{\mathbf{r}}{r^3} \\ \Rightarrow \mu \ddot{\mathbf{r}} &= -\gamma m_1 m_2 \frac{\mathbf{r}}{r^3} = -\gamma \mu M \frac{\mathbf{r}}{r^3} \end{aligned}$$

Es handelt sich also effektiv um *ein* Teilchen der Masse μ im Gravitationspotential von M , das sich mit dem Ortsvektor \mathbf{r} um den Ursprung bewegt. Man führt demnach eine Ein-Teilchen-Rechnung durch und erhält Kegelschnitte (Ellipsen für $E < 0$, Hyperbeln für $E > 0$) als Lösung der Differentialgleichung. Wir interessieren uns hier erst einmal für gebundene Bahnen, also Ellipsen. Wenn der Vektor \mathbf{r} auf einer Ellipse läuft, dann gilt das auch für die beiden Relativvektoren $\bar{\mathbf{r}}_1$ und $\bar{\mathbf{r}}_2$ im Schwerpunktsystem. Im Schwerpunktsystem laufen also beide

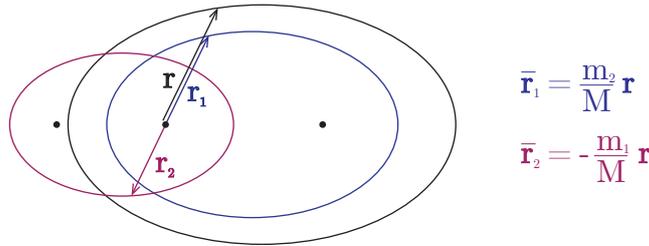


Abbildung 3.12: Im Schwerpunktsystem laufen beide Ortsvektoren gleichsinnig auf Ellipsen.

Massen gleichsinnig auf Ellipsen. Für die Halbachsen der Ellipsen in Abhängigkeit der Massen folgt aus der Ein-Teilchen-Rechnung:

$$a_1 = -\gamma \frac{\mu m_2}{2E_r}, \quad a_2 = -\gamma \frac{\mu m_1}{2E_r} \quad \Rightarrow \quad \frac{a_1}{a_2} = \frac{m_2}{m_1}$$

3 Mehrteilchensysteme

D.h. je größer die Masse, desto kleiner die Halbachse. Das Verhältnis der Massen von Sonne und Erde ist: $\frac{m_S}{m_E} = 3,33 \cdot 10^5$. Mit der Halbachse der Erde $a_E = 1 \text{ AE}$ (Astronomische Einheit) $= 1,5 \cdot 10^8 \text{ km}$ ergibt sich für die Halbachse der Sonne:

$$a_S = \frac{m_E}{m_S} a_E = \frac{1 \text{ AE}}{3,33 \cdot 10^5} = 500 \text{ km}$$

3.6 Zwei-Teilchen-Streuung

Zwei Massenpunkte bewegen sich aufeinander zu, wechselwirken für eine begrenzte Zeit und laufen wieder voneinander weg. Dieser Vorgang wird als *Streuung* oder *Stoß* bezeichnet. Streuexperimente sind zentral für die Atom-, Molekül-, Kern-

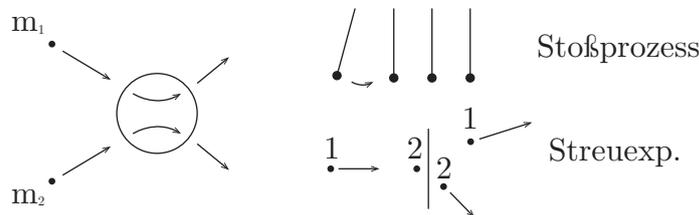


Abbildung 3.13: Bei der Zwei-Teilchen-Streuung sind die Bahnkurven ungebunden, wechselwirken aber in einem zentralen Bereich.

und Elementarteilchenphysik, da sie es erlauben, aus den experimentellen Daten auf das Wechselwirkungspotential zu schliessen (das ist ein Beispiel für ein *inverses Problem*, wobei das direkte Problem die Berechnung der Streuung aus dem Potential ist). Man muss zwei verschiedene Bezugssysteme unterscheiden:

- Laborsystem** \sum_L
Hier wird das Experiment gemacht. Wir verwenden für die Koordinaten im Laborsystem die Bezeichnung: \mathbf{r}_i
- Schwerpunktsystem** \sum_S
Das Schwerpunktsystem ist theoretisch einfacher zu handhaben (wenn abgeschlossen). Die Koordinaten kennzeichnen wir mit: $\bar{\mathbf{r}}_i$, $\sum_i m_i \bar{\mathbf{r}}_i = \mathbf{0}$

Das vollständige Problem kann nur in Kenntnis des Potentials gelöst werden. Allerdings können im allgemeinen Fall schon aus Impuls- und Energieerhaltung weitreichende Folgerungen gezogen werden (*Impulsanalyse*).

Impulserhaltung

$$\sum_L : \quad \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2 = \text{const.}$$

Das kommt daher, dass es keine äußeren Kräfte gibt. Dies sind drei Bestimmungsgleichungen für die sechs Unbekannte.

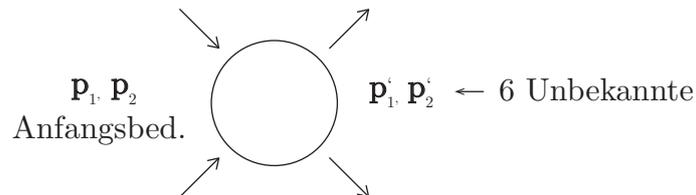


Abbildung 3.14: Die Zwei-Teilchen-Streuung hat sechs Unbekannte.

$$\sum_S : \quad \bar{\mathbf{p}}_1 + \bar{\mathbf{p}}_2 = \bar{\mathbf{p}}'_1 + \bar{\mathbf{p}}'_2 = \mathbf{0}$$

Da der Schwerpunkt hier ruht, heben sich die Impulse gerade auf. Das heißt:

$$\Rightarrow \quad \bar{\mathbf{p}}_1 = -\bar{\mathbf{p}}_2, \quad \bar{\mathbf{p}}'_1 = -\bar{\mathbf{p}}'_2$$

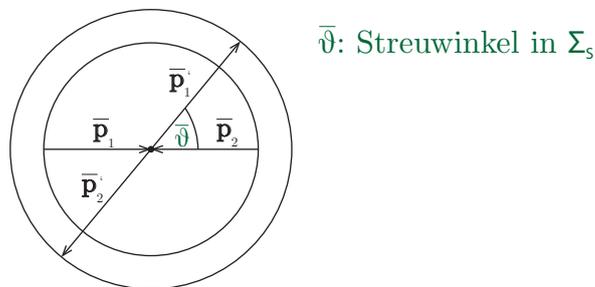


Abbildung 3.15: Einlaufende und auslaufende Impulse im Schwerpunktsystem heben sich jeweils auf.

Energieerhaltung

$$\sum_L : \quad \sum_{i=1}^2 \frac{\mathbf{p}_i^2}{2m_i} = \sum_{i=1}^2 \frac{\mathbf{p}'_i{}^2}{2m_i} (+Q) \quad [Q \text{ Energieübertrag bei } \textit{inelastischer Streuung}]$$

3 Mehrteilchensysteme

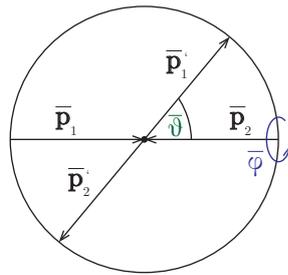
In unserem Fall ist $Q = 0$, denn wir gehen von elastischer Streuung aus (Energieerhaltung bei konservativen Kräften, keine zusätzlichen Freiheitsgrade wie An- oder Abregung der Teilchen).

$$\sum_S : \quad \sum_{i=1}^2 \frac{\bar{\mathbf{p}}_i^2}{2m_i} = \sum_{i=1}^2 \frac{\bar{\mathbf{p}}_i'^2}{2m_i} (+\bar{Q}) \quad (\text{ohne Beweis: } Q = \bar{Q})$$

$$\begin{aligned} T_r &= \frac{\bar{\mathbf{p}}_1^2}{2m_1} + \frac{\bar{\mathbf{p}}_2^2}{2m_2} \stackrel{\text{Impulssatz}}{=} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \bar{\mathbf{p}}_i^2 \quad (i = 1 \text{ oder } i = 2) \\ &= \frac{\bar{\mathbf{p}}_i^2}{2\mu} = \frac{\bar{\mathbf{p}}_i'^2}{2\mu} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow |\bar{\mathbf{p}}_i'| = |\bar{\mathbf{p}}_i|$$

Die Energieerhaltung legt also noch die Beträge fest. Da hier nochmals der Impulssatz verwendet wurde, ist das nur eine zusätzliche Bestimmungsgleichung, es bleiben also noch zwei Unbekannte, nämlich zwei Winkel. Wir machen jetzt noch



Alle Vektoren auf der gleichen Kugelschale, aber zwei unbekannte Winkel

$\bar{\vartheta}$: Streuwinkel in Σ_s

$\bar{\varphi}$: Azimutalwinkel

Abbildung 3.16: Aufgrund der Energieerhaltung sind die Beträge der Impulsvektoren vor und nach der Streuung gleich.

die zusätzliche Annahme, dass Teilchen 2 (das *Target*) vor dem Stoß ruht ($\mathbf{r}_2 = 0$). Demnach geht der Gesamtimpuls von Teilchen 1 aus, $\mathbf{p}_1 = \mathbf{P}$, und der anfängliche Impuls von Teilchen 2 ist der Nullvektor, $\mathbf{p}_2 = \mathbf{0}$. Für die Impulse nach dem Stoß gilt:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}'_1 &= m_1(\dot{\mathbf{R}} + \dot{\mathbf{r}}'_1) = \frac{m_1}{M} \mathbf{p}_1 + \bar{\mathbf{p}}'_1 \\ \mathbf{p}'_2 &= \mathbf{p}_1 + \underbrace{\mathbf{p}_2}_{=0} - \mathbf{p}'_1 = \mathbf{p}_1 - \left(\frac{m_1}{M} \mathbf{p}_1 + \bar{\mathbf{p}}'_1 \right) = \frac{m_2}{M} \mathbf{p}_1 - \bar{\mathbf{p}}'_1 \end{aligned}$$

Somit legt $\bar{\mathbf{p}}'_1$ die beiden Endimpulse fest.

$$\text{Energieerhaltung : } |\bar{\mathbf{p}}'_1| = |\bar{\mathbf{p}}_1| = \left| m_1(\dot{\mathbf{r}}_1 - \dot{\mathbf{R}}) \right| = \left| \mathbf{p}_1 - \frac{m_1}{M} \mathbf{p}_1 \right| = \frac{m_2}{M} |\mathbf{p}_1|$$

Impulsanalyse

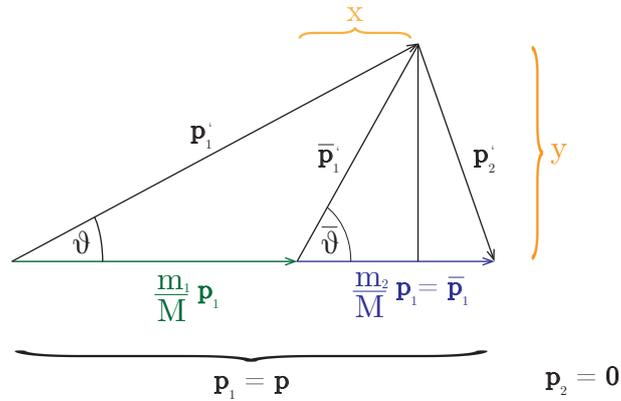


Abbildung 3.17: Für ein ruhendes Target liegen alle Impulsvektoren in einer Ebene und bilden ein einfaches Vektordiagramm.

Die Ergebnisse der Impulsanalyse mit einem ruhenden Target können in einem Vektordiagramm zusammengefasst werden. Aus diesem Diagramm kann man auch den Zusammenhang der Streuwinkel in Schwerpunkt und Laborsystem berechnen. Wir definieren die Längen x und y und lesen folgende Winkelverhältnisse ab:

$$\sin \bar{\vartheta} = \frac{y}{|\bar{\mathbf{p}}_1'|}$$

$$\cos \bar{\vartheta} = \frac{x}{|\bar{\mathbf{p}}_1'|}$$

Damit folgt:

$$\tan \vartheta = \frac{y}{x + \frac{m_1}{M} |\mathbf{p}_1|} = \frac{\sin \bar{\vartheta}}{\cos \bar{\vartheta} + \gamma} \quad \text{mit} \quad \gamma = \frac{m_1 |\mathbf{p}_1|}{M |\bar{\mathbf{p}}_1'|} = \frac{m_1 |\mathbf{p}_1|}{M \frac{m_2}{M} |\mathbf{p}_1|} = \frac{m_1}{m_2}$$

Die Beziehung zwischen ϑ und $\bar{\vartheta}$ wird also nur durch das Massenverhältnis bestimmt. Das Massenverhältnis führt auch zu starken Einschränkungen auf die möglichen Streuwinkel:

$\gamma > 1$ der linke Punkt liegt ausserhalb des durch $\bar{\mathbf{p}}_1'$ definierten Kreises (also so wie in der Skizze), Streuung nur in Vorwärtsrichtung, es gibt einen maximalen Streuwinkel.

$\gamma < 1$ der linke Punkt liegt innerhalb des durch $\bar{\mathbf{p}}_1'$ definierten Kreises, alle Streuwinkel möglich.

3 Mehrteilchensysteme

$\gamma = 1$ der linke Punkt liegt genau auf dem durch $\bar{\mathbf{p}}'_1$ definierten Kreis, der Satz von Thales besagt dann, dass die Teilchen im Laborsystem im rechten Winkel voneinander wegfliegen (diese Aussage macht nur Sinn, wenn die Impulse nicht verschwinden, was zum Beispiel beim Zentralstoss auf ein ruhendes Target mit Impulsaustausch nicht mehr gilt).

Streuung am $1/r$ -Potential

Zur vollständigen Lösung muss ein bestimmtes Potential betrachtet werden. Wir tun dies jetzt für das Gravitations/Coulomb-Potential, $V(r) = -\frac{\alpha}{r}$. Die Bahnen sind also Kegelschnitte.

$$\text{Anfangsgeschwind. } v \Rightarrow E = \frac{1}{2}\mu v^2 > 0$$

Es gibt also eine Hyperbel. Wir betrachten wieder $\mathbf{r}_2 = \mathbf{0}$ (ruhendes Target) und die Relativkoordinate $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$. Der *Stossparameter* b ist der Abstand, um den das einfallende Teilchen das Target verfehlen würde, wenn es keine Streuung gebe. Die Bahn des Massenpunktes wird beschrieben durch:

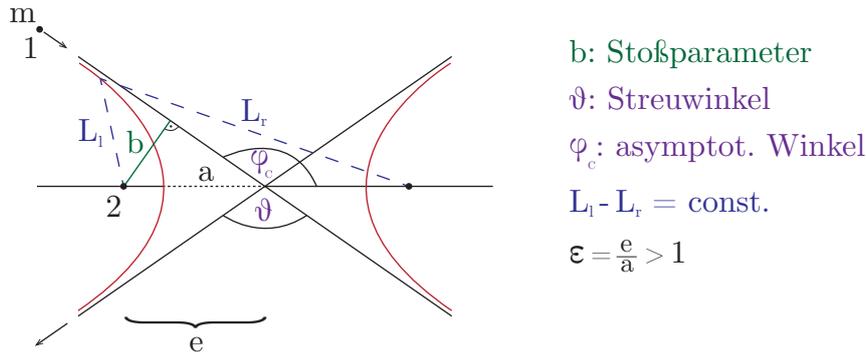


Abbildung 3.18: Die Zwei-Teilchen-Streuung mit Gravitationspotential ergibt Hyperbelbahnen.

$$r = \frac{k}{1 + \epsilon \cos \varphi} \quad \text{mit } \epsilon = \frac{e}{a} > 1 \text{ (Exzentrizität)}$$

Die Exzentrizität ist grösser als 1 aufgrund der positiven Energie:

$$\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2L^2 E}{\alpha^2 \mu}} > 1$$

3 Mehrteilchensysteme

Im Grenzfall $r = \infty$ folgt der kritische Winkel:

$$\varphi_C = \arccos\left(-\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

Dieser ist mit dem Streuwinkel verbunden:

$$\vartheta + \pi = 2\varphi_C$$

Der Drehimpuls folgt aus dem Stossparameter, $L = \mu bv$. Damit folgt:

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2(\mu bv)^2 \frac{1}{2} \mu v^2}{\alpha^2 \mu}} = \sqrt{1 + \frac{(b\mu v^2)^2}{\alpha^2}} \quad (1)$$

Für den Streuwinkel haben wir:

$$\sin \frac{\vartheta}{2} = \sin\left(\varphi_C - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos \varphi_C = \frac{1}{\varepsilon}$$

Einsetzen in (1) und Auflösen nach b ergibt:

$$b^2 = \left(\frac{1}{\sin^2\left(\frac{\vartheta}{2}\right)} - 1 \right) \frac{\alpha^2}{(\mu v^2)^2}$$

Somit haben wir einen eindeutigen Zusammenhang zwischen dem Streuwinkel und dem Stoßparameter gefunden.

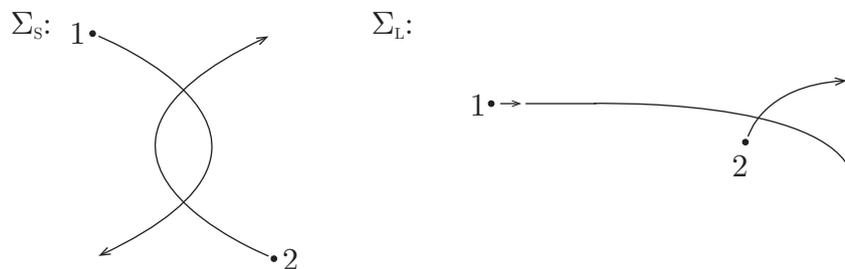


Abbildung 3.19: Hyperbelbahn der Streuung in Schwerpunkt- und Laborsystem.

Streuquerschnitt

Der Zusammenhang zwischen Streuwinkel und dem Stoßparameter als Funktion des Potentials erlaubt es, aus den experimentellen Streuwinkeln auf die Potentiale zurückzuschliessen. Experimentell werden in der Regel sogenannte *Streuquerschnitte* gemessen. Typischerweise hat man eine homogene Verteilung über den

3 Mehrteilchensysteme

Strahl, d.h. die Stossparameter sind nur entsprechend der Geometrie des Strahls verteilt. Deshalb skalieren alle Teilchenzahlen proportional zum eingeschossenen Teilchenfluss, also der Zahl der Teilchen, die pro Zeit und pro Querschnittsfläche eingeschossen werden, und alles kann auf ein Teilchen normiert werden. Zur Beschreibung des eingeschossenen Strahls sind zwei-dimensionale Polarkoordinaten angemessen. Nach dem Stoss fliegen die Teilchen in alle Richtungen weg, d.h. hier sind die Kugelkoordinaten angemessen. Wenn der Strahl in z-Richtung eingeschossen wird, dann ist der Streuwinkel gerade der Polarwinkel ϑ der Kugelkoordinaten. Jetzt muss man Grössen definieren, die wiedergeben, wie der ebene Strahl in eine kugelförmige Verteilung aufgefächert wird. Wir nehmen ein rotationssymmetrisches Potential an, d.h. es gibt nur einen relevanten Winkel, nämlich den Streuwinkel ϑ , der wiederum eindeutig aus dem Stossparameter b folgt. Allerdings messen wir die gestreuten Teilchen nicht im ganzen Ring, der zu einem Streuwinkel gehört, sondern nur in einem bestimmten Raumwinkel $d\Omega$ (also dem Raumkegel, der vom Detektor abgedeckt wird).

Definition Streuquerschnitt:

$$d\sigma = \frac{\text{\#Teilchen die pro Zeit in Raumwinkel } d\Omega \text{ gestreut werden}}{\text{\#Teilchen die pro Zeit und Fläche einfallen}}$$

Wegen dem eindeutigen Zusammenhang zum Stossparameter gilt:

$$\begin{aligned} d\sigma &\stackrel{\text{Polarkoord.}}{=} b db d\varphi = b \frac{db}{d\vartheta} d\vartheta d\varphi \frac{\sin \vartheta}{\sin \vartheta} \\ d\Omega &\stackrel{\text{Kugelkoord.}}{=} \sin \vartheta d\vartheta d\varphi \\ \Rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} &= b \frac{db}{d\vartheta} \frac{1}{\sin \vartheta} = \frac{1}{2} \frac{db^2}{d\vartheta} \frac{1}{\sin \vartheta} = \frac{\alpha^2}{2\mu^2 v^4} \frac{\cos(\frac{\vartheta}{2})}{\sin^3(\frac{\vartheta}{2})} \frac{1}{\sin \vartheta} \end{aligned}$$

Wegen

$$\sin \vartheta = \sin\left(\frac{\vartheta}{2} + \frac{\vartheta}{2}\right) = 2 \sin \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\vartheta}{2}$$

folgt:

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4\mu^2 v^4} \frac{1}{\sin^4 \frac{\vartheta}{2}}} \quad \text{Differentieller Streuquerschnitt}$$

Coulomb-Streuung von Elektronen an Kern mit Kernladungszahl Z

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{(Ze^2)^2}{(4\pi\epsilon_0)^2} \frac{1}{16E^2} \sin^{-4} \frac{\vartheta}{2}} \quad \text{Rutherford'sche Streuformel}$$

3 Mehrteilchensysteme

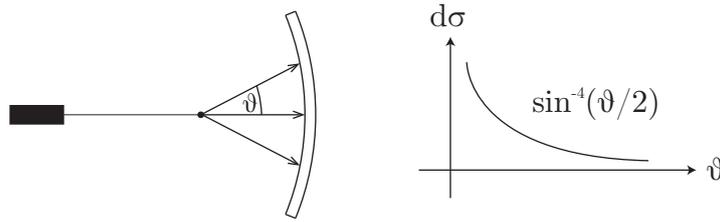


Abbildung 3.20: Im typischen experimentellen Aufbau misst ein Detektor mit endlichem Raumwinkel alle Streuwinkel aus. Für die Coulomb-Streuung fällt der differentielle Streuquerschnitt mit dem Winkel stark ab (Rutherford'sche Streuformel).

Interpretation: $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ hat die Dimension einer Fläche. Ein Teilchen, das durch diese Fläche tritt, wird in den gegebenen Streuwinkel gestreut. Je größer $\frac{d\sigma}{d\Omega}$, desto stärker ist die Streuung (für diesen Streuwinkel). Eine Integration führt auf den totalen Streuquerschnitt:

$$\sigma_{tot} = 2\pi \int_0^\pi d\vartheta \sin \vartheta \frac{d\sigma}{d\Omega} \quad (3.1)$$

Der totale Streuquerschnitt divergiert für das $1/r$ -Potential, weil diese Wechselwirkung langreichweitig ist, d.h. ein Teilchen wird immer gestreut.

3.7 Gekoppelte Schwingungen

Mehrteilchensysteme mit Massen und Federn sind wichtige Modelle für Molekül- und Festkörperphysik. Ohne Dämpfung kommt es zu Schwingungen wie beim harmonischen Oszillator.

Beispiele

1. Zwei gekoppelte Massen

$$m_1 \ddot{x}_1 = -k_1 x_1 - k_{12}(x_1 - x_2)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = -k_2 x_2 + k_{12}(x_1 - x_2)$$

2. Gekoppeltes Pendel: dasselbe mit $k_2 = 0$
3. Unendliche Kette, eindimensionaler Kristall

3 Mehrteilchensysteme

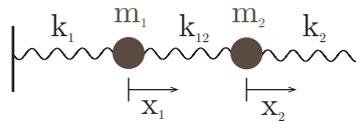


Abbildung 3.21: Zwei gekoppelte Massenpunkte.

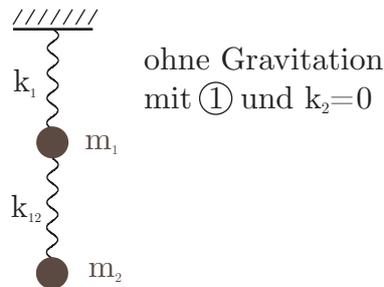


Abbildung 3.22: Gekoppeltes Pendel.

$$\begin{aligned}
 m\ddot{x}_n &= k(x_{n+1} - x_n) + k(x_{n-1} - x_n) \\
 &= k \underbrace{(x_{n+1} + x_{n-1} - 2x_n)}_{\text{diskretisierte 2. räumliche Abl.}}
 \end{aligned}$$

Alle diese Beispiele können rigoros als Eigenwertprobleme nach Exponentialansatz gelöst werden. Hier besprechen wir nur das 1. Beispiel nicht rigoros.

Beispiel 1

Ansatz: $x_i = \alpha_i \cos \omega t$ (keine Dämpfung)

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \quad -m_1\omega^2\alpha_1 &= -k_1\alpha_1 - k_{12}(\alpha_1 - \alpha_2) \\
 -m_2\omega^2\alpha_2 &= -k_2\alpha_2 - k_{12}(\alpha_1 - \alpha_2)
 \end{aligned}$$

Damit ergibt sich das folgende Gleichungssystem in Matrixschreibweise:

$$\begin{pmatrix} k_1 + k_{12} - m_1\omega^2 & -k_{12} \\ -k_{12} & k_2 + k_{12} - m_2\omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Falls die sogenannte *Säkulärterminante* verschwindet, d.h. $\det = 0$, besitzt das Gleichungssystem eine nicht-triviale Lösung. Das entspricht einer quadratischen Gleichung für ω^2 , welche auf zwei *Eigenfrequenzen* ω_{\pm} führt. Zu jeder Eigenfrequenz gehört eine *Eigenmode* (Eigenvektoren des Amplitudenvektors $(\alpha_1, \alpha_2)^t$). Wir diskutieren den Spezialfall $m_1 = m_2 = m$, $k_1 = k_2 = k$.

3 Mehrteilchensysteme

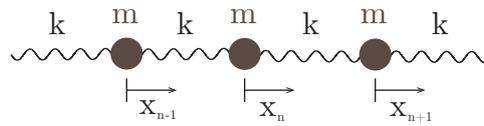


Abbildung 3.23: Die unendliche Kette ist das einfachste Modell für einen Kristall.

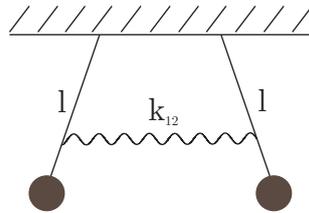


Abbildung 3.24: Das gekoppelte Pendel entspricht für kleine Auslenkungen den linear gekoppelten zwei Massen, also Beispiel 1.

1.Mode

$$\omega_-^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \begin{pmatrix} k_{12} & -k_{12} \\ -k_{12} & k_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Das entspricht einer gleichsinnigen Schwingung der beiden Massen. Dabei wird die koppelnde Feder nicht belastet, das ist also eine triviale Mode.

2.Mode

$$\omega_+^2 = \frac{k + 2k_{12}}{m} \Rightarrow \begin{pmatrix} -k_{12} & -k_{12} \\ -k_{12} & -k_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Das entspricht einer gegensinnigen Schwingung der beiden Massen. Dabei wird die koppelnde Feder periodisch gedehnt und gestaucht. Die Frequenz dieser Mode ist höher.

Allgemeine Lösung

Die allgemeine Lösung mit vier Parametern, die durch die Anfangsbedingungen festgelegt sind, lautet:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= a_- \cos(\omega_- t) + b_- \sin(\omega_- t) + a_+ \cos(\omega_+ t) + b_+ \sin(\omega_+ t) \\ x_2(t) &= a_- \cos(\omega_- t) + b_- \sin(\omega_- t) - a_+ \cos(\omega_+ t) - b_+ \sin(\omega_+ t) \end{aligned}$$

3 Mehrteilchensysteme

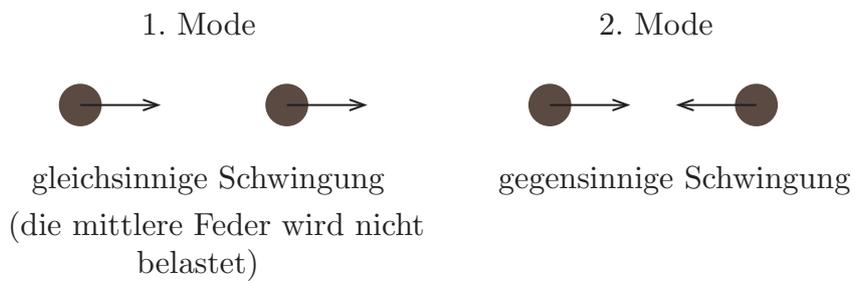


Abbildung 3.25: Ein System mit zwei Massenpunkten hat zwei Fundamentalmoden.