Stand 21.05.2004

Kap.1 Gruppe, allgemeine Begriffe

1.0 Axiome

Gruppe G: Menge von Elementen $g, g', ...$ mit einer Verknüpfung $\circ$ (oft unterdrückt)
$g_1, g_2 \in G \quad \rightarrow g_1 \circ g_2 \in G$

Postulate an Verknüpfung $\circ$

1) Assoziativ $g_1 \circ (g_2 \circ g_3) = (g_1 \circ g_2) \circ g_3$

2) Einselement $e \qquad e \circ g = g \circ e = g$

3) (eindeutiges) Inverses $g^{-1} : g \circ g^{-1} = g^{-1}_{\circ} g = e$

siehe Übung 1.0a (Links- und Rechtsinverses)

Ordnung einer Gruppe: $|G|$ = Anzahl der Elemente

Unser Interesse: hauptsächlich Gruppen mit kontinuierlich vielen Elementen

Abelsche Gruppe: $\circ$ ist kommutativ, d.h. $g_1 g_2 = g_2 g_1 \quad , \forall g_1, g_2 \in G$

Die meisten Gruppen, die wir betrachten werden, sind nichtabelsch.

1.1 Transformationsgruppen

Die meisten Gruppen denen wir begegnen haben die Gestalt von Transformationsgruppen d.h. sind ein unter Hintereinanderausführung abgeschlossener Satz $G = \{T, T', ..\}$ von 1-1-Abbildungen einer Menge M wobei mit jeder Abbildung immer auch das Inverse mitgenommen wird. Das Assoziativgesetz ist automatisch gewährleistet.

Tatsächlich lässt sich jede Gruppe als Transformationsgruppe auffassen, nähmlich als Gruppe der Linksmultiplikationen der Gruppenelemente selbst:

$$M = G, \quad g \in G \leftrightarrow T_g \text{ mit } T_g(g') := gg'$$

Die Linksmultiplikation T_g ist eine 1-1 Abbildung die g eindeutig charakterisiert.
Das Assoziativgesetz der Gruppe garantiert, dass die Hintereinanderausführung der T_g konform ist mit der Verknüpfung in der Gruppe:

$$T_{(g_2 \circ g_1)}(g) = (g_2 \circ g_1) \circ g = g_2 \circ (g_1 \circ g) = T_{g_2}\big(T_{g_1}(g)\big)$$

1.2 Beispiele

a) $G = \mathbb{N} = \{$ natürliche Zahlen; Verknüpfung: Addition$\}$
b) $G = \mathbb{Z}_n = \{0, ..., n-1$; Verknüpfung: Addition modulo $n\}$

c) $G = SO(3) = \{$ Drehungen um einen Punkt $\}$

Drehung ist charakterisiert durch Drehachse $\hat{n}$ und Drehwinkel $\phi \in [0, \pi]$
Drehvektor $\vec{w} = \phi\hat{n}$
explizite Form: $\vec{x}' = R\vec{x} = (\hat{n}\cdot\vec{x})\hat{n} + (\hat{n}\times\vec{x})\sin\phi - \hat{n}\times(\hat{n}\times\vec{x})\cos\phi$
$\equiv \vec{x}\cos\phi + \hat{n}(\hat{n}\cdot\vec{x})(1-\cos\phi) + \hat{n}\times\vec{x}\sin\phi$
als Mannigfaltigkeit: Kugel vom Radius π
diametrale Punkte auf dem Rand sind miteinander zu identifizieren
da $\quad R(-\vec{\omega}) = R(\vec{\omega})$ für $\phi = \pi$
$\circ$ = Hintereinanderausführung .
$R(\vec{w}_2) \circ R(\vec{w}_1) \stackrel{?}{=} R(\vec{w}'(\vec{w}_2, \vec{w}_1))$
Abgeschlossenheit offensichtlich wenn $\hat{n}_1 = \hat{n}_2$
Situation für $\hat{n}_1 \neq \hat{n}_2$ nicht so klar.

- Nehme analytische Geometrie zu Hilfe
  Punkte $\quad \{x^i\} \quad i = 1, ...3$

  Drehung $\quad x^i \to x'^i = R_{ik}x^k$, ($R_{ik}$ 3×3 Matrix)

  Längen bleiben erhalten: $x^2 = \sum_{i=1}^3 x^{i^2} = x'^2$

  gleichbedeutend mit: (T= transponiert) $R^T = R^{-1}$ oder $R^T R = RR^T = \mathbb{1}$
  $\Rightarrow \quad det(RR^T) = det(R)^2 = 1$
  Drehungen: $det(R) = +1$ (Spiegelungen nicht enthalten)
  Abgeschlossenheit jetzt leicht verifizierbar:
  Gegeben R_1, R_2 $\quad$ mit $\quad R_i^T = R_i^{-1}$ und $det(R_i) = 1$
  $\Rightarrow \quad (R_2R_1)^T = R_1^T R_2^T = R_1^{-1}R_2^{-1} = (R_1R_2)^{-1}$und $det(R_2R_1) = 1$
  d.h. (R_2R_1) ist ebenfalls eine Drehung.

Lineare Gruppe bzw. Matrixgruppe
$SO(3)$ ist ein Beispiel für eine Gruppe deren Elemente g gegeben sind als lineare Abbildungen eines Vektorraums, beziehungsweise durch entsprechende Matrizen nach Wahl einer Basis.

d) $G = SU(2)$
$= \{$Gruppe der unitären 2×2-Matrizen mit det $= 1\}$

Unitärität: $U^* = U^{-1}$
$U^* := \bar{U}^T$, $\bar{U}$ = konjugiert komplexe Matrix, d.h. $(U^*)_{ij} = \bar{U}_{ji}$
Zusammenhang mit $SO(3)$: (siehe Anhang 1)
vermittelt durch die Pauli-Matrizen $\sigma^k, k = 1, .., 3$

$U\sigma^k U^{-1} = \sigma^l R(U)_{lk}$ "Drehimpuls transformiert wie Vektor"
definiert Abbildung von $U \in SU(2) \to R(U) \in SO(3)$.
Parametrisierung der Gruppenelemente von $SU(2)$:
$U = \exp(-i\phi\,\hat{n}\cdot\frac{\vec{\sigma}}{2}) = \cos\frac{\phi}{2} - i\sin\frac{\phi}{2}\,\hat{n}\cdot\vec{\sigma}$
$R(U)$ hat Drehachse $\hat{n}$ und Drehwinkel $\phi \in (0, 2\pi)$
Abbildung verträglich mit Gruppenmultiplikation ($U_2U_1 \to R_2R_1$)
aber nicht eineindeutig: $R(U) = R(-U)$

e) **Permutationsgruppe** S_3

Gegeben 3 Objekte, numeriert als 1,2,3
S_3 = Gruppe der Vertauschungen

Schreibweise: $\binom{1 \quad 2 \quad 3}{1' \quad 2' \quad 3'}$

Einselement: $e = \binom{123}{123}$
Transpositionen: $(12) = \binom{123}{213}$ $(13) = \binom{123}{321}$ $(23) = \binom{123}{132}$

3er-Zyklen: $(123) = \binom{123}{231}$ $(132) = \binom{123}{312}$

Abgeschlossenheit und Assoziativität sind offensichtlich.
Inverse: $(123)^{-1} = (132)$ usw.

Notation: l-Zyklus $(i_1 i_2 .. i_l)$
Permutation $i_1 \to i_2 \to i_3 \to ... \to i_l \to i_1$, übrige fest.

Jede Permutation lässt sich eindeutig als Produkt von unabhängigen Zyklen schreiben.

e.g. $\binom{1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6}{3 \quad 4 \quad 6 \quad 2 \quad 1 \quad 5} = (1365)(24)$

Wichtige Anwendung von S_n: Quantenmechanik von n identischen Teilchen.

1.3 Multiplikationstabelle, Diskussion der Axiome

Wie einschränkend sind eigentlich die Gruppeneigenschaften?

$\circ \;\hat{=}\;$ Abbildung $\quad G \times G \to G$

$$(g_2, g_1) \to g_2 \circ g_1 = m(g_2, g_1)$$

Assoziativ: $m(g_3, m(g_2, g_1)) = m(m(g_3, g_2), g_1)$
erscheint in dieser Form als nicht trivial.

- Wahl: $g_1 = e$
  LS: $m(g_3, m(g_2, e)) = m(g_3, g_2)$
  RS: $m(m(g_3, g_2), e) = m(g_3, g_2)$
- Wahl: $g_2 = g_3^{-1}$
  $m(g_3, m(g_3^{-1}, g_1)) = m(m(g_3, g_3^{-1}), g_1) = g_1$
  in der Tat, eine nichttriviale Forderung an m

Inverses :
Frage nach der Lösbarkeit von $g_2 = m(g_1, x)$ bei gegebenen g_1, g_2.
Lösung: $\quad x = g_1^{-1} g_2 \quad (= m(g_1^{-1}, g_2))$

d.h. $m(g_1, \cdot)$ ist eine umkehrbar eindeutige Funktion von $G \to G$
$m^{-1}(g_1, \cdot) = m(g_1^{-1}, \cdot)$ ist inverse Funktion zu $\quad m(g_1, \cdot)$

1.4: Isomorphie von Gruppen

G isomorph zu G' ($G \cong G'$) $\Leftrightarrow$
$\exists$ 1-1 Abb. f: $G \to G'$ mit $f(g_1 g_2) = f(g_1) f(g_2)$
(notwendigerweise dann $f(e) = e'$)

Isomorphe Gruppen sind als "identisch" zu betrachten, d.h. als gleichwertige Realisierungen desselben abstrakten Gebildes.

Die in 1.1 beschriebene Äquivalenz ist ein Isomorphismus zwischen der Gruppe und der zugehörigen Transformationsgruppe der Linksmultiplikationen.

Automorphismus: Isomorphismus im Sonderfall $G' = G$.

Homomorphismus: Abbildung f nicht unbedingt 1-1

Beispiele:

a) Abstrakte Gruppen mit 3-Elementen $= \{e, a, b\}$
   $ab = ba = e$ (lt. Übung 1)
   Konkrete Realisierung:
   $A_3 =$ geraden Permutationen von $S_3 = \{e, a = (123), b = (132)\}$

1.5 Untergruppen, Normalteiler, Zentrum, direktes Produkt,..

Untergruppe H:
$\{e\} \subset H \subset G$, H abgeschlossen bezüglich $\circ$ und Bildung des Inversen.

Beispiele:
a) $A_3 \subset S_3$
b) Drehungen um eine feste Achse $\subset SO(3)$

Äquivalente Untergruppen:
für $g \in G$ bilde: $H_g = gHg^{-1}$

H_g ist eine Untergruppe
H_g ist isomorph zu H

Normalteiler, Invariante Untergruppen
$H_g \subset H$ (als Menge) $\forall g \in G$
in Worten: H ist invariant unter Konjugation mit den Elementen von G.

> Drehungen um eine Achse sind zwar eine Untergruppe aber kein Normalteiler. Eine Drehung um die z-Achse ist von einem gedrehten Koordinatensystem aus gesehen keine Drehung mehr um die z-Achse.

Faktorgruppe
Invariante Untergruppen erlauben eine Modulo-Bildung.
(Verallgemeinerung der Addition modulo n in Z_n)

bilde Linksnebenklassen
$e_H = \{h \in H\}$
wähle $g' \notin e_H$ und bilde $g'_H = \{g'h, h \in H\}$
wähle $g'' \notin e_H, g'_H$ und bilde $g''_H = \{g''h, h \in H\}$
usw.
$e, g', g'', ..$ sind Repräsentanten der Nebenklassen, aber jedes andere Element einer Klasse kann die gleiche Rolle spielen.
Analog: Rechtsnebenklassen
Links- und Rechtsnebenklassen sind für Normalteiler identisch .
Die Nebenklassen bilden eine Gruppe (die Faktorgruppe):
Multiplikation : $g'_H \circ g''_H = (g' \circ g'')_H$
Bezeichnung: G/H
Ordnung : $|G/H| = |G|/|H|$
(Übung 1.5a)

Der *Kern* eines Homomorphismus ist ein Normalteiler.
Gegeben $f : G \to G'$, mit $f(g_2 g_1) = f(g_1)f(g_2)$

$Kern(f) := \{g \in G \quad mit f(g) = e'\}$
$Kern(f)$ ist Normalteiler und $G/Kern(f) \cong G'$
d.h. G' ist gleichwertig zu $G\, mod\, Kern(f)$

Begriff des Normalteilers spielt eine grosse Rolle bei der Strukturanalyse von Gruppen .
(Theorem von Jordan-Hölder)

Beispiele:

a) $SO(3)$ hat keinen nichttrivialen Normalteiler. Ein Normalteiler wäre ein Satz von $\vec{w}$-Vektoren, der von allen Koordinatensystemen aus gleich aussieht und eine Untergruppe bildet.

b) A_3 ist Normalteiler.
$A_3 = \{$ gerade Permutation von S_3 $\}$
Diese Eigenschaft ist invariant unter Konjugation.

c) $SU(2)$ hat Normalteiler $Z_2 = \{1\!\!1_{2\times 2},\ -1\!\!1_{2\times 2}\}$
und nur diesen (konsistent mit a))

Zentrum Z einer Gruppe
Definition $Z(G) = \{g \in G \text{ mit } gg' = g'g \quad \forall g' \in G\}$
$Z(G)$ ist Normalteiler.

Beispiele:
$Z(SU(2)) = \{1\!\!1_{2\times 2},\ -1\!\!1_{2\times 2}\}$
$Z(SO(3)) = \{1\!\!1_{3\times 3}\}$
$Z(S_3) = \{e\}$

Direktes Produkt von Gruppen
Gegeben: Gruppen N_1, N_2
Direktes Produkt: $N_1 \times N_2 := \{(n_1, n_2), n_i \in N_i, (n'_1, n'_2) \circ (n_1, n_2) := (n'_1 n_1, n'_2 n_2)\}$
N_1 kann identifiziert werden mit der Untergruppe
$\{(n_1, e_2), n_1 \in N_1, e_2 =$Einselement von $N_2\}$
analog N_2 isomorph zu $\{(e_1, n_2), n_2 \in N_2\}$
so identifizierte N_i sind Normalteiler von $N_1 \times N_2$
und Faktorgruppen sind: $N_1 \times N_2/N_1 = N_2, \quad N_1 \times N_2/N_2 = N_1$
Verallgemeinerung: $N_1 \times N_2 \times .. \times N_k$

Direkte Produkte treten typischerweise dann auf wenn Symmetrien vorhanden sind die auf unterschiedliche Freiheitsgrade wirken. So zum Beispiel bei $SU(3) \times SU(2)$ für die leichten Quarks mit einer Farb $SU(3)$ und einer Isospin $SU(2)$.
Es gibt jedoch auch Fälle von direkten Produkten in weniger offensichtlicher Form. So

bestehen zum Besipiel die Isomorphien $O(3) \cong \mathbb{Z}_2 \times SO(3)$ und $SO(4) \cong SU(2) \times SU(2)$.

Semidirektes Produkt zweier Gruppen
Gegeben: Gruppen F, N
$F \overset{s}{\times} N := \big\{(f,n), f \in F, n \in N, (f',n') \circ (f,n) = \big(f'f, n'T_{f'}(n)\big\}$
wobei die 1-1 Abbildungen $T_f : N \to N$ folgende Eigenschaften haben:
$T_f(n'n) = T_f(n')T_f(n)$ T_f ist Automorphismus von N
$T_{f'f}(n) = T_{f'}\big(T_f(n)\big)$ f in N dargestellt durch Gruppe von Abbildungen
d.h. T_f ist Darstellung von F durch Automorphismen von N.
Bemerkung: das direkte Produkt entspricht der Darstellung von F durch den trivialen Automorphismus von N (i.e. $T_f(n) = n$)

Beispiel: *Poincare-Gruppe*
Abbildungen im Minkowski-Raum $x \to x' = \Lambda x + a$
zusammengesetzt aus Lorentztransformationen Λ und Translationen a.
Hintereinanderausführung entspricht folgender Gruppenmultiplikation:
$(\Lambda', a') \circ (\Lambda, a) = (\Lambda'\Lambda, a' + \Lambda' a)$

N ist Normalteiler von $F \overset{s}{\times} N$
(gemeint ist die Untergruppe $\{e, n \in N\}$)
Beweis:
$(f\,,\,m)^{-1} = \big(f^{-1}, T_{f^{-1}}(m^{-1})\big)$
$(f\,,\,m)(e\,,\,n)(f\,,\,m)^{-1} = (f\,,\,m)\big(f^{-1},\, n\,T_{f^{-1}}(m^{-1})\big) = \Big(e\,,\, mT_f(nT_{f^{-1}}(m^{-1}))\Big)$
$= \big(e\,,\, mT_f(n)m^{-1}\big)$

Bemerkung: $mT_f(n)m^{-1} = T_f(n)$ falls N abelsch (e.g. Poincare-Gruppe)

Faktorgruppe zu N: $F \overset{s}{\times} N/N \cong F$
da die Nebenklassen durch (f, e) repräsentiert sind.

Es folgt: $\big(F \overset{s}{\times} N/N\big) \overset{s}{\times} N \cong F \overset{s}{\times} N$
Für $G = F \overset{s}{\times} N$ gilt also wie beim direkten Produkt: $\big(G/N\big) \overset{s}{\times} N \cong G$
d.h. N "kürzt" sich heraus.

Bedingungen für Zerlegung in ein semidirektes Produkt

Die Bedingungen die vorhanden sein müssen damit eine Gruppe als semidirektes Produkt geschrieben werden kann erhält man durch "Rückwärtslesen" der Definition. Als erstes muss ein Normalteiler N vorhanden sein. Ferner muss es möglich sein Repräsentanten f für die Nebenklassen so auszuwählen, dass sie eine Untergruppe F bilden. Jedes Gruppenelement ist nach Wahl der Repräsentanten in eindeutiger Weise gegeben als Produkt nf. Man beachte dass hier die Konvention für Rechtsneben-

klassen verwendet wird. Die Gruppenmultiplikation schreibt sich in dieser Zerlegung als $(n'f')(nf) = (n'(f'nf'^{-1}))(f'f)$ Die Klammern dienen zur Identifizierung der T_f. Man veriziert leicht, dass $T_f(n) = fnf^{-1}$ die geforderten Eigenschaften besitzt. Die Zuordnung $nf \leftrightarrow (f, n)$ etabliert dann den Isomorphismus.
Die gefundene Form $T_f(n) = fnf^{-1}$ ist allgemein genug, da umgekehrt für ein semidirektes Produkt $(f, e)(e, n)(f^{-1}, e) = (e, T_f(n))$ gilt.

Einfache Gruppe:
Eine Gruppe G heisst *einfach* falls es keine echten Normalteiler gibt.

Demnach ist $SO(3)$ einfach, aber $SU(2)$ und $U(1)$ sind nicht einfach.

Halbeinfache Gruppe:
Eine Gruppe G heisst *halbeinfach* falls es keine echten abelschen Normalteiler gibt.

Demnach sind $U(1)$ und $SU(2)$ also auch nicht halbeinfach.

Einfache, halbeinfache Lie-Gruppen:
Bei Lie-Gruppen werden die Begriffe *einfach* und *halbeinfach* in einer weniger einschränkenden Form verwendet.
Eine Lie-Gruppe ist eine kontinuierliche Gruppe. Entsprechend gibt es hier den Begriff der Lie-Untergruppe als kontinuierliche Untergruppe. Die Abwesenheit eines Lie-Normalteilers ist also eine schwächere Forderung.

$SU(2)$ ist in der Tat einfach als Lie-Gruppe.
Wir werden uns hauptsächlich mit Lie-halbeinfachen Gruppen beschäftigen.
Es stellt sich heraus, dass Lie-halbeinfache Gruppen isomorph sind zu direkten Produkten von Lie-einfachen Gruppen , d.h. zu
$G_1 \times G_2 \times ...$ mit einfachen G_i
$U(1)$ behält in dieser Nomenklatur seinen Status als nicht einfache Gruppe.

1.6 Satz von Cayley für endliche Gruppen

- Satz von Cayley:
  Jede endliche Gruppe der Ordnung n lässt sich als Untergruppe von S_n realisieren.

Nahezu eine Trivialität.
$G \cong \{$Transformationsgruppe der Linksmuliplikationen$\}$ (siehe 1.1)
1-1Abbildungen einer endlichen Menge sind nichts anderes als Permutationen.
$\Rightarrow \quad G \cong$ Untergruppe von $S_{|G|}$

1.7 Kristallographische Gruppen

Diskrete Untergruppen von $O(3)$ die jeweils eine bestimmte Kristallsymmetrie beschreiben. Verträglichkeit mit Translationssymmetrie erlaubt maximal 6-fache Drehachsen. Die mathematische Analyse der Möglichkeiten führt auf insgesamt 32 Gruppen.
Ausführlich beschrieben in [St]S.16ff, S27ff.

Für eine Diskussion der Fullerene siehe [St]S.43ff