10. Übungsblatt zur Vorlesung Theoretische Physik II (Elektrodynamik)

Abgabe der Lösungen: in den Übungen am 4.7.07

Aufgabe 1: Residuensatz (5 Punkte)

Berechnen Sie das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4}$$

mit dem Residuensatz.

Aufgabe 2: Greensfunktionen (2+2+5* Punkte)

a) Finden Sie je eine Greensche Funktion, die die folgenden Differentialgleichungen in einer Dimension löst:

(i) $\frac{d}{dx} G_1(x, x') = -4\pi\delta(x - x')$

(ii) $\frac{d^2}{dx^2} G_2(x, x') = -4\pi\delta(x - x')$

b) Es soll eine Greensfunktion zur modifizierten Poissongleichung ($\Delta \to \Delta - m^2$) konstruiert werden, d.h. eine Lösung der Differentialgleichung

$$(\Delta - m^2) G(\vec{x}, \vec{x}\,') = -4\pi\delta(\vec{x} - \vec{x}\,').$$

Zeigen Sie dass

$$G(\vec{x}, \vec{x}\,') = 4\pi \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}\,')}}{\vec{k}^2 + m^2}$$

eine Lösung dieser Differentialgleichung ist. Benutzen Sie dabei

$$\delta(\vec{x} - \vec{x}\,') = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}\,')}.$$

c) *Zusatzaufgabe:* Führen Sie die k-Integration für $G(\vec{x}, \vec{x}\,')$ aus Teil b) durch. Anleitung: Legen Sie die z-Achse des Koordinatensystems in Richtung des Vektors $\vec{x} - \vec{x}\,'$ und gehen Sie zu Kugelkoordinaten über. Führen Sie zunächst die Winkelintegration aus. Für die radiale Integration brauchen Sie den Residuensatz.

Aufgabe 3: retardierte Potentiale und Lorentz-Eichung (4 Punkte)

Die retardierten Potentiale können in der Form

$$\phi_{ret}(\vec{x},t) = \int dt'\, d^3x' G^-(\vec{x}-\vec{x}\,', t-t')\rho(\vec{x}\,', t'),$$

$$\vec{A}_{ret}(\vec{x},t) = \int dt'\, d^3x' G^-(\vec{x}-\vec{x}\,', t-t')\frac{1}{c}\vec{j}(\vec{x}\,', t')$$

dargestellt werden. Zeigen Sie, ausgehend von dieser Darstellung (d.h. ohne G^- explizit auszuschreiben), dass die retardierten Potentiale die Bedingung der Lorentz-Eichung erfüllen. (*Hinweis:* Sie können annehmen dass bei partiellen Integrationen die Randterme im Unendlichen verschwinden.)

Aufgabe 4: $\vec{B}$-Feld eines zeitabhängigen Stroms (3+2+1+1 Punkte)

Ein halbkreisförmiger Leiter in der x-y-Ebene (Radius R, Mittelpunkt im Ursprung) transportiert mit einem zeitabhängigen Strom $I(t)$ Ladungen zwischen zwei Ladungs-Reservoirs hin und her.

a) Berechnen Sie das retardierte Vektorpotential auf der z-Achse.
Hinweis: Für unendlich dünne Leiter wird $\vec{j}d^3x' \to I d\vec{r}\,'$, wobei $d\vec{r}\,'$ das Linienelement entlang des Leiters ist.

b) Begründen Sie, warum für $|z| \gg R$ auf der z-Achse die Ableitungen $\partial_x A_z$, $\partial_y A_z$, $\partial_x A_y$, $\partial_z A_y$ und $\partial_y A_x$ vernachlässigbar klein sind im Vergleich zu $\partial_z A_x$.

c) Berechnen Sie das $\vec{B}$-Feld für $|z| \gg R$ auf der z-Achse. Sie erhalten zwei Terme, einer davon enthält die Zeitableitung von I.

d) Ab welchem Wert von $|z|$ übertrifft der Term mit dI/dt den anderen, "Biot-Savart-artigen" Ausdruck in $\vec{B}$ im zeitlichen Mittel, wenn $I(t) = I_0 \sin \omega t$ ist?