Zu Aufgabe 4d) der Vordiploms-Klausur:

$$E = \frac{1}{2} J \dot{\varphi}^2 + Mga \cos\varphi / \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \dot{\varphi}^2 = \frac{2}{J} \left(E - Mga \cos\varphi / \sqrt{2} \right)$$

$$\Rightarrow t = \int_0^{\pi/4} \frac{d\varphi}{\dot{\varphi}} = \int_0^{\pi/4} \frac{d\varphi}{\sqrt{\frac{2}{J}\left(E - Mga \cos\varphi / \sqrt{2}\right)}}$$

Wir können für E die Anfangsenergie $E_0 = \frac{1}{2} J\omega^2 + Mga/\sqrt{2}$ einsetzen und erhalten:

$$t = \int_0^{\pi/4} \frac{d\varphi}{\sqrt{\frac{2}{J}\left(\frac{1}{2}J\omega^2 + \frac{Mga}{\sqrt{2}}(1-\cos\varphi)\right)}} .$$

Da $J\omega^2 \ll Mga$, wird das Integral vom Bereich $\varphi \ll 1$ dominiert. Wir können also $\cos\varphi \simeq 1 - \varphi^2/2$ benutzen.

$$t \simeq \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\sqrt{\frac{Mga}{\sqrt{2}J}}} \cdot \frac{d\varphi}{\sqrt{\underbrace{\frac{J\omega^2\sqrt{2}}{Mga}}_{\equiv\, \varepsilon \text{ mit } \varepsilon \ll 1} + \varphi^2}}$$

$$t \simeq 2^{1/4} \sqrt{\frac{J}{Mga}} \underbrace{\int_0^{\pi/4} \frac{d\varphi}{\sqrt{\varepsilon + \varphi^2}}}_{\simeq \int_0^{\sqrt{\varepsilon}} \frac{d\varphi}{\sqrt{\varepsilon}} + \int_{\sqrt{\varepsilon}}^{\pi/4} \frac{d\varphi}{\varphi} \simeq O(1) + \ln\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}}$$

$$\Rightarrow t \simeq 2^{1/4} \sqrt{\frac{J}{Mga}} \ln\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \simeq \underline{\underline{2^{-3/4} \sqrt{\frac{J}{Mga}} \ln\left(\frac{Mga}{J\omega^2}\right)}}$$