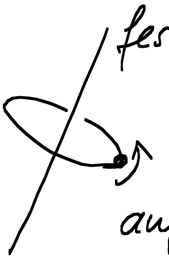
10 Trägheitsmoment & Trägheitstensor

10.1 Rotation um eine feste Achse



feste Achse A

Masse m_a auf fester Kreisbahn mit Radius $r_{a,\perp}$

$$\Rightarrow T = \frac{m_a}{2} \dot{r}_a^{\,2} = \frac{m_a}{2} \underbrace{\omega}_{\text{Kreisfrequenz}}{}^2 r_{a,\perp}^2$$

feste Achse A

fest mit der Achse verbundener starrer Körper

(kann als Menge von Massenpkt.-en aufgefasst werden.)

$$\Rightarrow T = \sum_a \frac{m_a}{2} \omega^2 r_{a,\perp}^2$$

bzw.

$$T = \frac{1}{2} J_A \omega^2$$

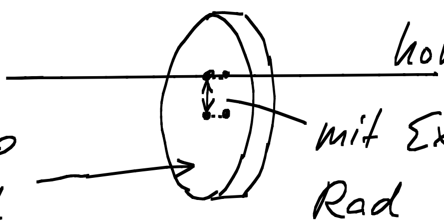
mit $J_A = \sum_a m_a r_{a,\perp}^2$

J_A: Trägheitsmoment bzgl. der Achse A

Kontinuumslimes: $J_A = \int \underbrace{d^3\bar{r}\, \varrho(\bar{r})}_{\text{"}m_a\text{"}} \cdot \underbrace{r_\perp^2}_{\text{"}r_{a,\perp}^2\text{"}}$

(Sei z.B. der Koord.ursprung auf der Achse gewählt; $\bar{r} = \underset{\text{parallel}}{\bar{r}_\parallel} + \underset{\text{orthogonal}}{\bar{r}_\perp}$; $r_\perp^2 = \bar{r}_\perp^2$)

Beispiel:



horizontale Achse

(konstante) Dichte ϱ
Dicke d

mit Exzentrizität a montiertes Rad (Radius R)

$T = \frac{1}{2} J(a) \cdot \omega^2$; $J(a) = \varrho \cdot \int d^3\bar{r} \cdot \bar{r}_\perp^{\,2}$

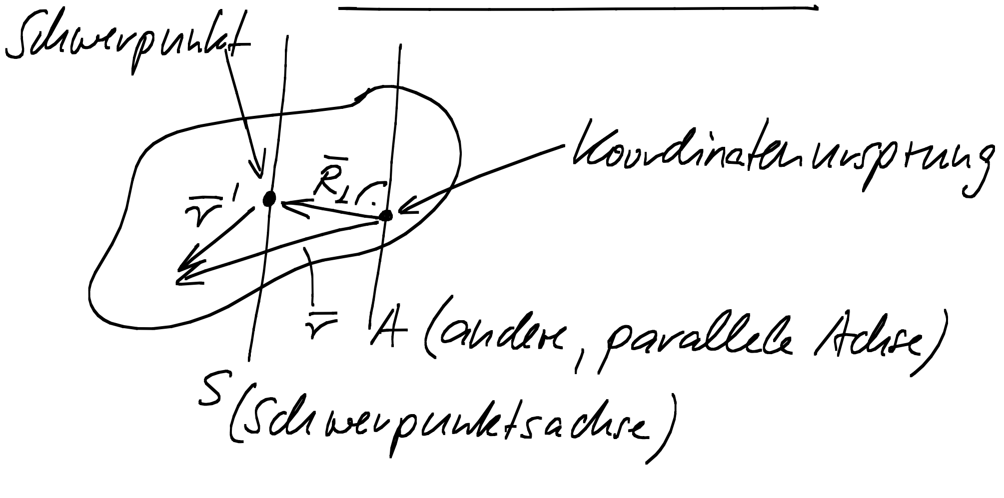
über Volumen des Rades, wobei aber der Koord. ursprung auf der um a versetzten Drehachse liegt. (Kompliziert, aber kein prinzipielles Problem)

$V = - Mg \cos\varphi$
($\varphi = 0$ entspricht Ruhelage)

[Wir benutzen, daß die Gravitation im Schwerpkt. angreift.]

<u>Schließlich:</u> $\omega = \dot\varphi \Rightarrow L = \frac{1}{2} J(a)\, \dot\varphi^2 + Mg\cos\varphi$

<u>10.2 Satz von Steiner</u>



$$J_A = \sum_a m_a \bar{r}_{a,\perp}^{\,2} = \sum_a m_a \left(\bar{R}_\perp + \bar{r}'_{a,\perp}\right)^2$$

$$= \sum_a m_a \left(\bar{R}_\perp^{\,2} + 2\bar{R}_\perp \cdot \bar{r}'_{a,\perp} + \bar{r}'^{\,2}_{a,\perp} \right)$$

$$= M R_\perp^2 + 2R_\perp \cdot \underbrace{\left(\sum_a m_a \bar{r}'_{a,\perp} \right)}_{0 \text{, weil } \bar{r}'_{a,\perp} \text{ vom Schw.pkt. aus gemessen.}} + \underbrace{\sum_a m_a \bar{r}'^{\,2}_{a,\perp}}_{J_S \text{ (Schwerpkts-Trägheitsmoment)}}$$

$$\boxed{J_A = J_S + M R_\perp^2}$$ Steinerscher Satz

($R_\perp$ ist der Abstand der Schwerpktsachse zur parallelen Achse A)

Fortsetzung des Beispiels:

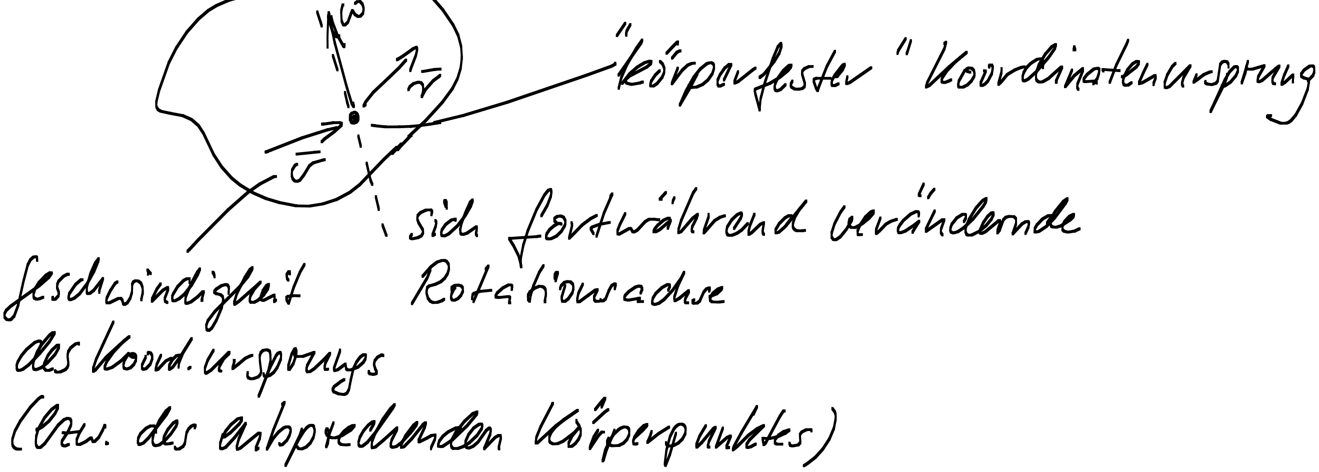
$J_a = J + Ma^2$ mit J – Trägheitsmoment des Rades bzgl. Symmetrieachse:

$$J = \varrho \underbrace{\int d^3\bar{r}}_{\text{über Volumen des Rades}} \cdot \underbrace{\bar{r}_\perp^{\,2}}_{\text{Abstand von Symm.achse}}$$

(leicht zu berechnen, z.B. in Zylinderkoordinaten, → Übungen)

10.3 Trägheitstensor

Allgemeinste Bewegung eines starren Körpers:
Translation + Rotation



$$T = \sum_a \frac{m_a}{2} \bar{v}_a^{\,2} = \sum_a \frac{m_a}{2} \left(\bar{v} + \bar{\omega} \times \bar{r}_a \right)^2$$

$\bar{v}$: durch Translation

$\bar{\omega} \times \bar{r}_a$: durch Rotation (vgl. Abschnitt 4.2: $\Delta \bar{r} = \Delta \bar{\varphi} \times \bar{r}$, $\frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t} \simeq \bar{\omega} \times \bar{r}$ durch Drehung)

$$\downarrow$$

$$T = \sum_a \frac{m_a}{2} \Big(\bar{v}^2 + \underbrace{2 \bar{v} \cdot (\bar{\omega} \times \bar{r}_a)}_{=0,\ \text{falls}} + (\omega \times \bar{r}_a)^2 \Big)$$

a) $\bar{v} = 0$, Körper ist an einer Stelle im Koord.ursprung fixiert, wie bei einem Kreisel mit festem Auflagepunkt:

b) $\sum_a m_a \bar{r}_a = 0$, Koord.ursprung fällt mit Schwerpkt. des Körpers zusammen.

In diesen beiden Fällen gilt

$$T = \frac{M}{2} \bar{v}^2 + \sum_a \frac{m_a}{2} \left(\bar{\omega} \times \bar{r}_a \right)^2$$

$\bar{\omega}$ i.A. zeitabhängig!

Auswertung des 2. Terms für einen Pkt. mit $\bar{r}_a = \bar{r}$:

$$(\bar{\omega} \times \bar{r})^2 = (\bar{\omega} \times \bar{r})_i (\bar{\omega} \times \bar{r})_i = \varepsilon_{ijk} \omega_j r_k \, \varepsilon_{ilm} \omega_l r_m$$

$$= \left(\delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl} \right) \omega_j \omega_l r_k r_m$$

$$= \left(\delta_{jl} \bar{r}^2 - r_j r_l \right) \cdot \omega_j \omega_l$$

– Dies mit Index a versehen, mit m_a multiplizieren, summieren $\longrightarrow$

$$\Rightarrow \underbrace{\sum_a m_a \left(\delta_{ij} \bar{r}_a^{\,2} - (r_a)_i (r_a)_j \right)}_{\equiv\ \Theta_{ij} \ -\ \text{Trägheitstensor}} \omega_i \omega_j$$

$$\Rightarrow \boxed{T = \frac{1}{2} M \bar{v}^2 + \frac{1}{2} \Theta_{ij} \omega_i \omega_j}$$

(falls a) Koord.ursprung = Schwerpkt. oder b) $\bar{v} = 0$)

<u>Kommentare:</u>

- Θ eines Körpers ist immer bzgl. eines gewissen Punktes (Koord.ursprungs) definiert, der (relativ zum Körper) ein für alle Mal fest gewählt sein muß. (Man wählt meist den Schwerpkt. oder einen sonstigen "besonders symmetrischen" Punkt.)
- gemäß 3.3 ist Θ in der Tat ein Tensor (bzgl. Drehungen um den Ursprung):

da a) δ_{ij}-Tensor ; $\bar{r}_a^{\,2}$ - Skalar (invariant unter Rotationen)

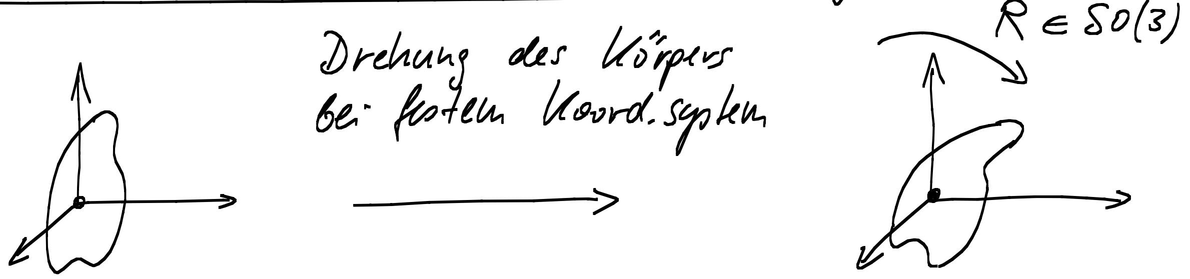
b) $\bar{r}_a$ - Vektor $\Rightarrow (r_a)_i (r_a)_j$-Tensor

<u>Ganz explizit:</u> sei $(x_1, x_2, x_3) \equiv (x, y, z)$, dann gilt

$$\Theta_{ij} = \sum_a m_a \left(\delta_{ij} \bar{r}_a^{\,2} - (r_a)_i (r_a)_j \right) = \sum_a m_a \begin{pmatrix} y_a^2 + z_a^2 & -x_a y_a & -x_a z_a \\ -y_a x_a & x_a^2 + z_a^2 & -y_a z_a \\ -z_a x_a & -z_a y_a & x_a^2 + y_a^2 \end{pmatrix}_{ij}$$

$\Rightarrow \Theta_{ij}$ ist eine symm. Matrix.

Explizite Diskussion des Verhaltens bei Drehungen:



Trägheitstensor: $\Theta_{ij} \longrightarrow \Theta'_{ij} = R_{ik} R_{jl} \Theta_{kl}$

(z.B. gilt

$$(r_a)_i \longrightarrow (r_a')_i = R_{ij} (r_a)_j$$

und folglich obiges Tensor-verhalten für $(r_a)_i (r_a)_j$)

In Matrixschreibweise: $\Theta' = R \Theta R^T = R \Theta R^{-1}$.

[Alternativ kann man den Körper fest lassen und das Koord.system um R^{-1} drehen. Die Elemente von Θ transformieren dann genau wie oben ("passiver Standpkt.", vgl. 3.4).]

Diagonalisierbarkeit:

Jede symm. Matrix kann durch eine orthogonale Trf. diagonalisiert werden $\Rightarrow$ a) Der Körper kann stets so gedreht werden, daß

$$\Theta_{ij} = \begin{pmatrix} \Theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \Theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_3 \end{pmatrix}_{ij}$$

b) Man kann stets ein Koord.system wählen, so daß Θ_{ij} diagonal ist (wie bei a))

- Die $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$ heißen "Hauptträgheitsmomente".
- Die Koord.achsen bei b) heißen "Hauptträgheitsachsen" des Körpers.

<u>Zurück zum Trägheitsmoment bzgl. fester Achse:</u>

Sei $\bar{v} = 0$ und $\bar{\omega} = \hat{e} \cdot \omega$ fix. $(|\hat{e}| = 1.)$

Dann gilt $T = \frac{1}{2} \Theta_{ij} \omega_i \omega_j = \frac{1}{2} \underbrace{(\Theta_{ij} \hat{e}_i \hat{e}_j)}_{\equiv \Theta_{\hat{e}}} \cdot \omega^2$

$\equiv \Theta_{\hat{e}}$ (Trägheitsmom. bzgl. Achse $\hat{e}$)

Falls Θ_{ij} diagonal, gilt z.B. für $e_{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$(e_{(1)})_i \, \Theta_{ij} \, (e_{(1)})_j = \Theta_{11} \equiv \Theta_1 \quad \text{(siehe oben)}.$$

$\Rightarrow$ Die Hauptträgheitsmomente sind die Trägheitsmomente bzgl. der Hauptträgheitsachsen. ||

Ebenso gilt bei diagonalem Θ_{ij}:

$$\Theta_{ij} (e_{(1)})_j = \begin{pmatrix} \Theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \Theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \Theta_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ $e_{(1)}$ ist Eigenvektor zu Θ_{ij} mit Eigenwert Θ_1.

Letzteres ist aber eine koordinatenunabhängige Aussage; also folgt: Die Vektoren $e_{(a)}$ $(a = 1,2,3)$, welche die Hauptträgheitsachsen charakterisieren, sind die Eigenvektoren von Θ. Die Θ_a sind die zugehörigen Eigenwerte.

Im Hauptachsensystem gilt: (Bei $\bar{v}=0$)

$$T = \frac{1}{2}\left(\Theta_1 \omega_1^2 + \Theta_2 \omega_2^2 + \Theta_3 \omega_3^2 \right).$$

<u>Schließlich zur expliziten Berechnung von Θ_{ij}:</u>

$$\Theta_{ij} = \sum_a m_a \left(\delta_{ij} \bar{r}_a^{\,2} - (r_a)_i (r_a)_j \right)$$

Kont. limes $\downarrow$

$$\Theta_{ij} = \int \rho(\bar{r})\, d^3\bar{r} \left(\delta_{ij}\, \bar{r}^2 - r_i r_j \right),$$

z.B. $\Theta_{11} = \Theta_{xx} = \int dx\,dy\,dz\; \rho(x,y,z)\,(y^2+z^2)$

$\Theta_{12} = \Theta_{xy} = -\int dx\,dy\,dz\; \rho(x,y,z)\; x\cdot y$

über Vol. des Körpers

Kommentar: Falls $\rho(x,y,z)$ symm. unter Reflexion $x \to -x$ verschwindet Θ_{12} wegen Antisymmetrie der Fkt. x (und damit des Integranden).

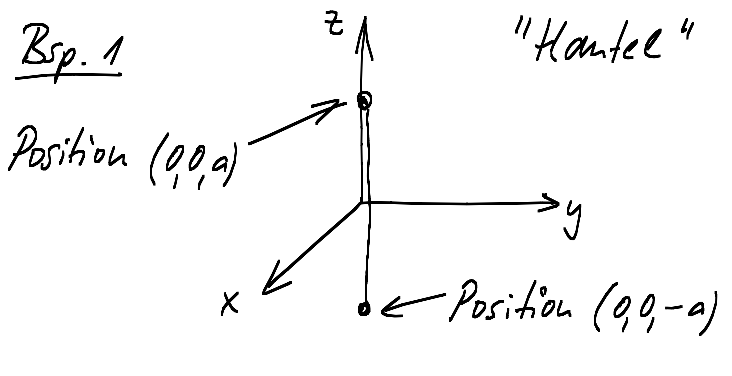
$\Rightarrow$ "Die Hauptträgheitsachsen sind i.A. die (anschaulichen) Symm.achsen des Körpers."

10.4 Das Trägheitsellipsoid

<u>Zunächst zwei Beispiele zur Intuition:</u>

<u>Bsp. 1</u>

"Hantel" (Masse $2m$, Verbindungsstab masselos)



$$\Theta_{ij} = \sum_{\substack{\bar r = (0,0,a) \\ \& \ \bar r = -(0,0,a)}} m \left(\delta_{ij} \bar r^2 - \bar r_i \bar r_j \right) = 2m \left(\delta_{ij} \bar r^2 - \bar r_i \bar r_j \right)$$

(mit $\bar r = (0,0,a)$)

$$= 2ma^2 \left(\mathbb{1} - \begin{pmatrix} 0&0&0 \\ 0&0&0 \\ 0&0&1 \end{pmatrix} \right)_{ij} = 2ma^2 \begin{pmatrix} 1&0&0 \\ 0&1&0 \\ 0&0&0 \end{pmatrix}$$

In der Tat: Rotation um x & y-Achse gleichwertig; Rotation um z-Achse kostet keine Energie.

Bsp. 2: homogene Kugel

Θ ist ein Tensor 2. Stufe; Θ ist invariant unter Drehungen

$$\Rightarrow \Theta_{ij} \sim \delta_{ij}$$

(außerdem, aus Dimensionsgründen, $\Theta_{ij} \sim mR^2 \delta_{ij}$

(numer. Vorfaktor erfordert Rechnung))

zur Begründung:

a) Fakt: δ_{ij} ist der einzige inv. Tensor mit 2 Indizes (in 3 Dimensionen).

b) Fakt: $A = RAR^T$ für jedes $R \in SO(3) \Rightarrow A \sim \mathbb{1}$ (folgt aus elementarer Darstl. th. von Gruppen).

Da die obige Voraussetzung gerade für den Trägheitstensor der Kugel gilt, haben wir $\Theta \sim \mathbb{1}$ bzw. $\Theta_{ij} \sim \delta_{ij}$.

Zur geometrischen Darstellung eines symm. Tensors:

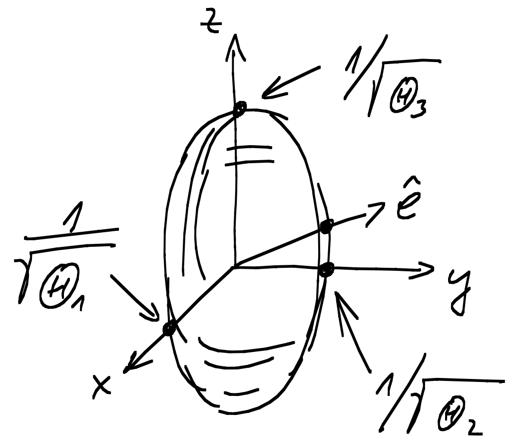
Vektor $\longrightarrow$ "Pfeil"

symm. Tensor $\longrightarrow$ "Fläche 2. Grades"

- Gegeben Trägheitstensor Θ, definiere die zugehörige Fläche 2. Grades durch
$$x_i \, \Theta_{ij} \, x_j = 1 \, .$$

- Diese Fläche ist ein Ellipsoid (Trägheitsellipsoid).
- Zur Begründung:

Sei Θ_{ij} diagonal. Dann lautet die Def.gleichung der Fläche:
$$\Theta_1 x^2 + \Theta_2 y^2 + \Theta_3 z^2 = 1$$



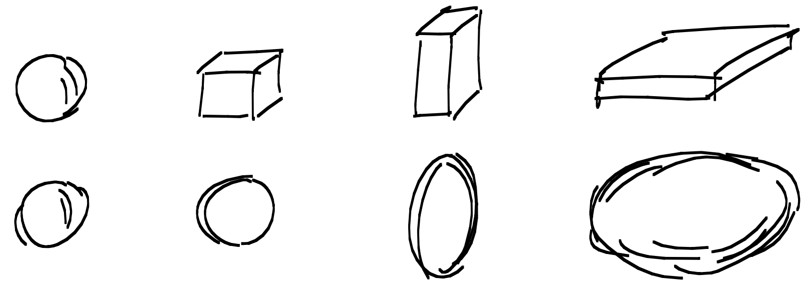
(Offensichtlich ist jeder der "Schnitte" $x = \text{const.}$, $y = \text{const.}$ oder $z = \text{const.}$ dieser Fläche eine Ellipse; daher der Name.)

Falls Θ_{ij} nicht diagonal, so gilt doch
$\Theta_{ij} = R_{ik} R_{jl} \tilde{\Theta}_{kl}$ für gewisse $R \in SO(3)$ & $\tilde{\Theta}$ diagonal. $\Rightarrow$ Die durch Θ_{ij} definierte Fläche ist schlicht das durch R gedrehte Ellipsoid zu $\tilde{\Theta}_{ij}$.

- Eine beliebige (durch $\hat{e}$ definierte Achse) schneidet das Ellipsoid bei $\bar{x} = \hat{e} \cdot |\bar{x}|$. Es gilt

$$1 = \Theta_{ij} x_i x_j = \underbrace{\Theta_{ij} \hat{e}_i \hat{e}_j}_{\Theta_{\hat{e}}\text{; siehe oben}} |\bar{x}|^2 \Rightarrow \underbrace{|\bar{x}| = \frac{1}{\sqrt{\Theta_{\hat{e}}}}}_{\text{Man kann am Bild des Ellipsoids direkt die Trägheitsmomente um die versch. Achsen ablesen.}}$$

- Das Trägheitsellipsoid folgt (ungefähr) der Form des Körpers:



Abschlußkommentare:

① Ganz analog zu kinet. Energie T läßt sich auch der Drehimpuls $\bar{L}$ sehr einfach durch Θ ausdrücken:

- Pkt. rotiert um Ursprung: $\bar{L} = \bar{r} \times \bar{p} = m \bar{r} \times (\bar{\omega} \times \bar{r})$

$$L_i = m\, \varepsilon_{ijk}\, r_j\, (\bar{\omega} \times \bar{r})_k = m\, \varepsilon_{ijk}\, r_j\, \varepsilon_{klm}\, \omega_l\, r_m$$

--- analoge Rechnung zu T ---

$$L_i = m \left(\delta_{ij}\, \bar{r}^2 - r_i r_j \right) \omega_j$$

--- Summation über viele Punkte ---

$$L_i = \sum_a m_a \left(\delta_{ij}\, \bar{r}_a^{\,2} - (r_a)_i (r_a)_j \right) \omega_j = \underline{\underline{\Theta_{ij}\, \omega_j}}$$

② Ganz analog zum Vektor ist auch Θ eine geometrische Größe, die prinzipiell unabhängig von ihren Komponenten in einem konkreten Koord.system Bedeutung hat.

- Man denke sich Θ dazu z.B. durch drei orthogonale Einheitsvektoren (die Hauptträgheitsachsen) und drei Skalare ("Zahlen") (die Hauptträgheitsmomente) bestimmt.
- Alternativ denke man an ein im Raum gegebenes Trägheitsellipsoid.

③ Der Begriff des Tensors läßt sich auch auf formalere Art (insbesondere ohne Bezugnahme auf ein bestimmtes Koordinatensystem oder die Komponentendarstellung) formulieren:

- Sei V ein euklidischer Vektorraum (Vektorraum mit positiv definitem Skalarprodukt)

- Dann ist der Raum $V \otimes V$ der Tensoren 2. Stufe definiert als Raum aller bilinearen Funktionale auf $V \times V$, also als Raum aller Abb.-en

$$V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(v^i, w^j) \longmapsto t^{ij} v^i w^j$$

Dies sind die bisher zur Definition benutzten Komponenten des Tensors.

- Obiges läßt sich natürlich problemlos zu Tensoren höherer Stufe verallgemeinern, welche dann als multilineare Funktionale, $V \times V \times \cdots \times V \longrightarrow \mathbb{R}$, definiert sind.