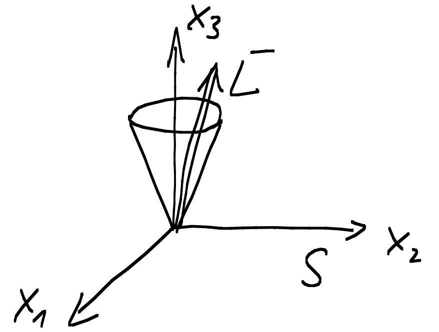
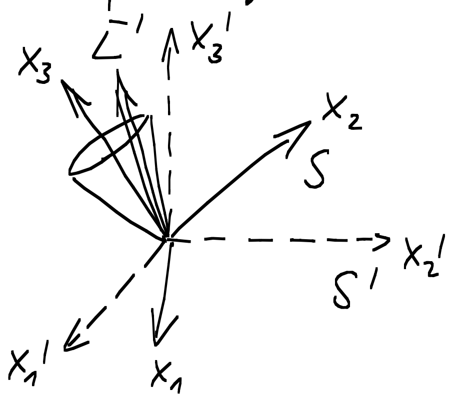
11 Der Kreisel

11.1 Eulersche Gleichungen

Körperfestes System



raumfestes System



Die Bewegung des Kreisels sei durch eine zeitabh. Drehmatrix $R(t) \in SO(3)$ beschrieben. Entsprechend gilt: $\bar L' = R\bar L$

(sowie, ganz allgemein, für jeden Vektor, $\bar v' = R\bar v$, wobei $\bar v'/\bar v$ den Vektor im raum-/körperfesten System bezeichnet.)

Abschnitt 2.2 $\longrightarrow$ $\dot{\bar L}' = \bar M'$ (Drehmoment)

$$(R\bar L)^{\cdot} = R\bar M$$

$$\dot R\bar L + R\dot{\bar L} = R\bar M$$

Erinnerung: Abschnitt 4.3 $\rightarrow$ $\dot R\bar r = R(\bar\omega \times \bar r)$

momentane Winkelgeschwindigkeit im rotierenden (körperfesten) Koord.system

$$R(\bar\omega \times \bar L) + R\dot{\bar L} = R\bar M \qquad | \text{ mal } R^{-1} \text{ von links}$$

$$\dot{\bar L} = \bar M + \bar L \times \bar\omega$$

Mit $\bar L = \Theta\bar\omega$ und $\dot{\bar L} = \Theta\bar\omega$ (Θ zeitunabh. im körperfesten System) folgt:

$$\Theta \dot{\bar{\omega}} = \bar{M} + (\Theta \bar{\omega}) \times \bar{\omega} .$$

Wähle körperfestes System = Hauptachsensystem; $\Theta_{ij} = \begin{pmatrix} \Theta_1 & & \\ & \Theta_2 & \\ & & \Theta_3 \end{pmatrix}_{ij}$

$$\left.\begin{aligned} \Rightarrow \quad \Theta_1 \dot{\omega}_1 &= M_1 + \omega_2 \omega_3 (\Theta_2 - \Theta_3) \\ \Theta_2 \dot{\omega}_2 &= M_2 + \omega_3 \omega_1 (\Theta_3 - \Theta_1) \\ \Theta_3 \dot{\omega}_3 &= M_3 + \omega_1 \omega_2 (\Theta_1 - \Theta_2) \end{aligned}\right\} \text{Euler-Gleichungen}$$

" + zyklische Permutationen"

11.2 Freier Kreisel – geometrisch

Energieerhaltung: $E = \frac{1}{2} \omega^T \Theta \omega = \text{const.}$

im Hauptachsensystem: $E = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3} \Theta_i \omega_i^2$

Mit $L_i = \cancel{\sum} \Theta_i \omega_i$ folgt daraus: $E = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3} \frac{L_i^2}{\Theta_i}$

oder: $$\frac{L_1^2}{2E\Theta_1} + \frac{L_2^2}{2E\Theta_2} + \frac{L_3^2}{2E\Theta_3} = 1$$

$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ beschreibt Ellipsoid mit Halbachsen } a, b, c}$

$\Rightarrow$ $\bar{L}$ liegt auf Ellipsoid mit Halbachsen $\sqrt{2E\Theta_i}$. ||

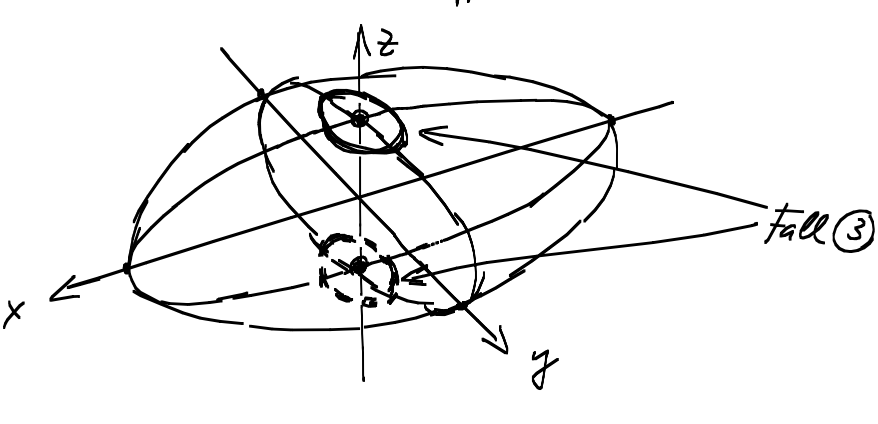
Drehimpulserhaltung: $\bar{L}'$ ist konstant. $\Rightarrow \bar{L}'^2 = \text{const.}!$

$$\bar{L}' = R\bar{L} \quad \Rightarrow \quad \bar{L}'^2 = (R\bar{L})^2 = \bar{L}^2 = \text{const.}!$$

$\Rightarrow$ || $\bar{L}$ liegt auf Sphäre mit Radius $|\bar{L}|$. ||

"Binet-Ellipsoid":

(O.B.d.A. sei
$a > b > c$;
d.h. $\Theta_1 > \Theta_2 > \Theta_3$)



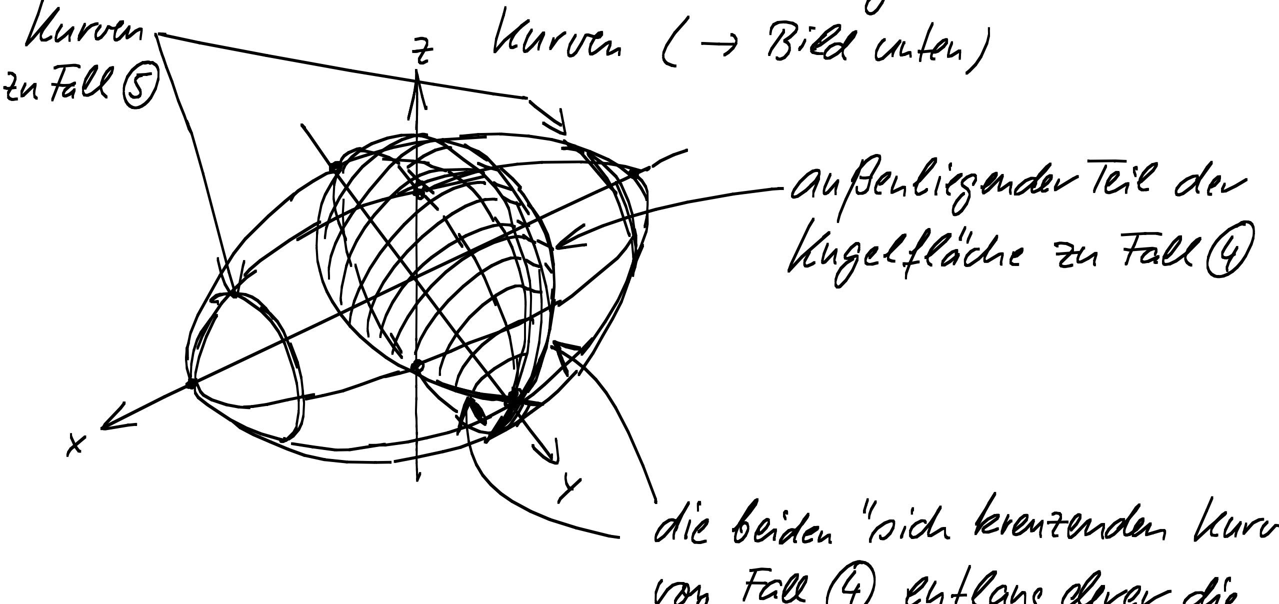
① $|\bar{L}| < \sqrt{2E\Theta_3}$ unmöglich

② $|\bar{L}| = \sqrt{2E\Theta_3}$ ⇒ "einbeschriebene Kugel";
2 Berührungspunkte: $\bar{L} = \pm(0,0,|\bar{L}|)$
(→ Rotation mit $\bar{\omega}$ = const. als Lösung möglich.)

③ $\sqrt{2E\Theta_3} < |\bar{L}| < \sqrt{2E\Theta_2}$ ⇒ Schnittmenge von Kugel & Ellipsoid
= 2 geschlossene Kurven → obiges Bild

(→ $\bar{L}$ bewegt sich (im körperfesten System) entlang einer dieser Kurven;
$\bar{L}'$ = const. ⇒ Körper präzessiert (kräftefrei) entsprechend im raumfesten System;
Es gibt kleine geschlossene Kurven um die isolierten Punkte von ② ⇒ Bewegung von ② ist stabil!)

④ $|\bar{L}| = \sqrt{2E\Theta_2}$ ⇒ Kugel berührt Ellipsoid bei $\bar{L} = \pm(0,|\bar{L}|,0)$
und schneidet entlang zweier sich kreuzender Kurven (→ Bild unten)



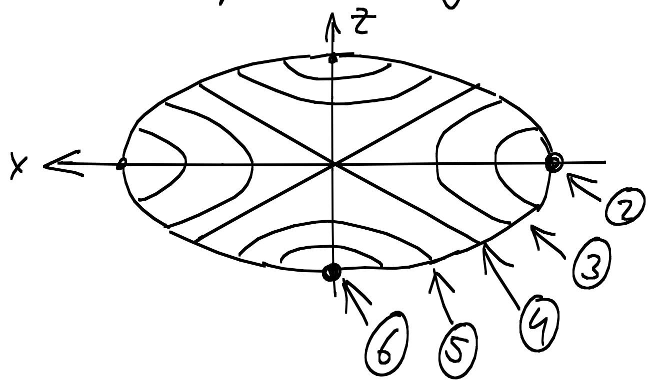
[noch zu Fall ④: Falls $\bar{L}$ nicht an einem der beiden Berührungspunkte "festsitzt" führt es "großräumige" Bewegungen aus (entsprechend für den Körper im raumfesten System ⇒ Das Festsitzen von $\bar{L}$ an einem der Berührungspunkte ist <u>nicht</u> stabil.]

⑤ $\sqrt{2E\Theta_2} < |\bar{L}| < \sqrt{2E\Theta_1} \Rightarrow$ 2 Kurven; ähnlich zu ③; siehe obiges Bild.

⑥ $|\bar{L}| = \sqrt{2E\Theta_1} \Rightarrow$ "umschriebene" Kugel; 2 Berührungspunkte; ähnlich zu Fall ② (<u>stabiler</u> Grenzfall zu ⑤.)

⑦ $|\bar{L}| > \sqrt{2E\Theta_1}$ unmöglich

<u>Abschließend</u>: unser Ellipsoid von "$y=\infty$" aus gesehen:



11.3 Poinsot Konstruktion (fortgeschritten)

Wir bleiben beim freien Kreisel und versuchen eine geometrische Analyse im raumfesten System:

$$T(\bar{\omega}') = \frac{1}{2}\omega_i'\Theta_{ij}'\omega_j'$$

wird als skalare Fkt. im Raum der Winkelgeschwindigkeiten aufgefaßt. "Äquienergieflächen" (vgl. "Äquipotentialflächen" oder "Höhenlinien") sind durch

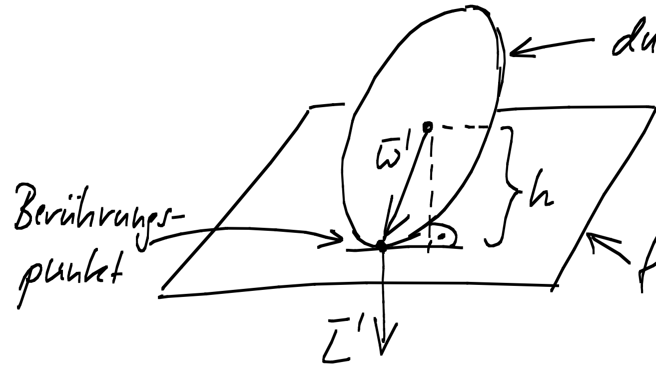
$$T(\bar{\omega}') = \text{const.}$$

definiert und beschreiben Ellipsoide.

$\bar{L}' = \bar{\nabla}_{\bar{\omega}'} T(\bar{\omega}')$ steht (Gradient!) senkrecht auf diesen Flächen.

(Nebenrechnung: $(\bar{\nabla}_{\bar{\omega}} T)_i = \frac{\partial}{\partial \omega_i'}\left(\frac{1}{2}\omega_j'\Theta_{jk}'\omega_k'\right) = \frac{1}{2}\left(\Theta_{ik}'\omega_k' + \omega_j'\Theta_{ji}'\right) = L_i'$)

Dies läßt sich in folgendem Bild veranschaulichen:



← durch $T = \text{const.}$ definiertes, von Θ' abhängendes Ellipsoid

← feste Ebene (fest, da durch Orthogonalität zu $\bar{L}'$ definiert)

Außerdem: $h = \bar{\omega}' \cdot \bar{L}' / |\bar{L}'| = \bar{\omega}'^T \Theta' \bar{\omega}' / |\bar{L}'| = \frac{T}{|\bar{L}'|} = \text{const.}$

$\Rightarrow$
- Bewegung des Körpers im Raum kann verstanden werden aus der "Bewegung" des (mit dem Körper fest verbundenen) Trägheitsellipsoids im Raum der $\bar{\omega}'$.
- Die Bewegung des Trägheitsellipsoids ist ein Rollen* auf einer festen Ebene, wobei das Zentrum des Ellipsoids in einer festen Höhe h über der Ebene fixiert ist.

(*) <u>Rollen</u>: Der Pkt. des Ellipsoids mit dem dieser die Ebene berührt hat jeweils Geschwindigkeit $\bar{0}$, da sich Körper (und damit Ellipsoid) in jedem Moment mit der Winkelgeschwindigkeit $\bar{\omega}'$ (die zu diesem Pkt. zeigt) dreht. Dies schließt ein "Rutschen" auf der Ebene aus.)

11.4 Freier Kreisel – analytisch

Euler Gl.-en: $\Theta_1 \dot{\omega}_1 = \omega_2 \omega_3 (\Theta_2 - \Theta_3)$ & zykl. Permutationen

$\Rightarrow$ Falls 2 der 3 Komponenten $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ verschwinden, gilt $\bar{\omega} = \text{const.}$ Wie bei 11.2 diskutiert, ist von diesen 3 "stationären" Lösungen der Fall der Rotation um die "mittlere" Hauptträgheitsachse instabil.

<u>Ab jetzt</u>: Zur Vereinfachung $\underbrace{\Theta_1 = \Theta_2}_{\equiv \Theta_0} < \Theta_3$ ("plattgedrückte" Kugel, ähnlich Erde)

$$\Rightarrow \quad \Theta_0 \dot\omega_1 = (\Theta_0 - \Theta_3)\,\omega_2\omega_3$$
$$\Theta_0 \dot\omega_2 = -(\Theta_0 - \Theta_3)\,\omega_3\omega_1$$
$$\Theta_3 \dot\omega_3 = 0 \Rightarrow \omega_3 = \text{const.} \Rightarrow$$ Die ersten beiden Gl.-en

werden zu: $\dot\omega_1 = -\alpha\omega_2$ mit $\alpha \equiv -\omega_3(1 - \Theta_3/\Theta_0)$
$\dot\omega_2 = \alpha\omega_1$

$$\Rightarrow \ddot\omega_1 = -\alpha\dot\omega_2 = -\alpha^2\omega_1 \Rightarrow \omega_1 = A\cos(\alpha t + \varphi)$$ (mit $\varphi = 0$ o.B.d.A.)

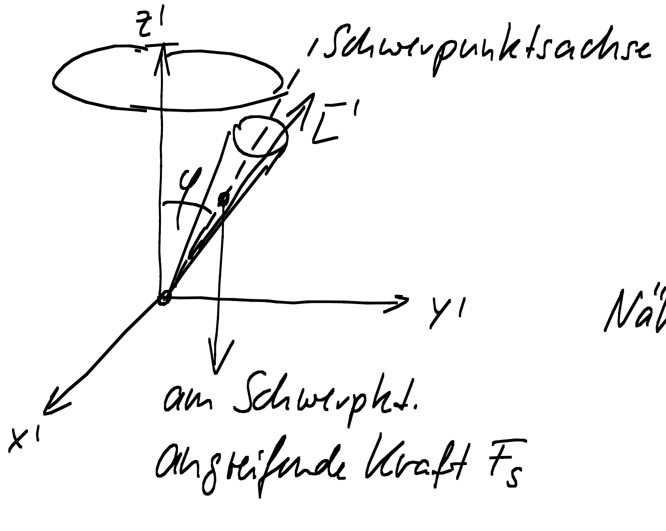
<u>Lösungen:</u> $\left\| \begin{matrix} \omega_1 = A\cos\alpha t \\ \omega_2 = A\sin\alpha t \end{matrix} \right\|$ (Bewegung von $\bar\omega$ & $\bar L$ auf einem Kreis entspricht der Erwartung von M.2 für ein symm. Ellipsoid.)

<u>Beispiel:</u> Erde: $-(1 - \Theta_3/\Theta_0) \sim 0.003 \sim \varepsilon$
Präzessionsfrequenz: $\alpha \sim \omega_{Erde} \cdot \varepsilon$

$$T_{Präz.} \sim \frac{T_{Erde}}{\varepsilon} \sim \frac{1\,\text{Tag}}{\varepsilon} \sim 300\,\text{Tage} \sim 10\,\text{Monate}$$

experimentell: Obiges ist zu naiv.
Man beobachtet den sogenannten "Chandler wobble" statt sauberer Präzession. Gründe sind u.a. Jahreszeiteneinfluß & Deformierbarkeit der Erde.

M.5 Kreisel im Schwerefeld – vereinfacht



$\bar M'$ – orthogonal zur durch $\hat e_z$ & Schwerpkts.achse aufgespannten Ebene.

Näherungsannahme: $\bar L' \parallel$ Schwerpkts.achse

$$\Downarrow$$

$$\underline{\underline{\bar L' \perp \bar M'}}$$

Diese Idealisierung ($\bar{L}' \perp \bar{M}'$) macht die "vereinfachte Behandlung" möglich:

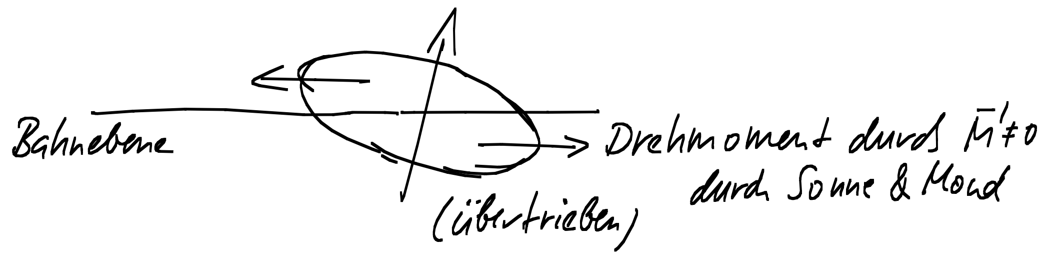
$\dot{\bar{L}}' = \bar{M}' \Rightarrow$ Spitze von $\bar{L}'$ bewegt sich auf Kreis um $\hat{e}_z$.

Kreisradius: $R = |\bar{L}'| \sin\varphi$, Geschwindigkeit: $v = |\bar{M}'|$

$\Rightarrow$ Periode $T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi |\bar{L}'| \sin\varphi}{|\bar{M}'|}$

(Unsere Idealisierung ist gut, so lange $\frac{2\pi}{T}$ (Präzessionskreisfrequenz) $\ll \omega_{\text{Schw.pkts.achse}}$, so daß der Beitrag der Präzession zu $\bar{L}'$ vernachlässigbar ist.)

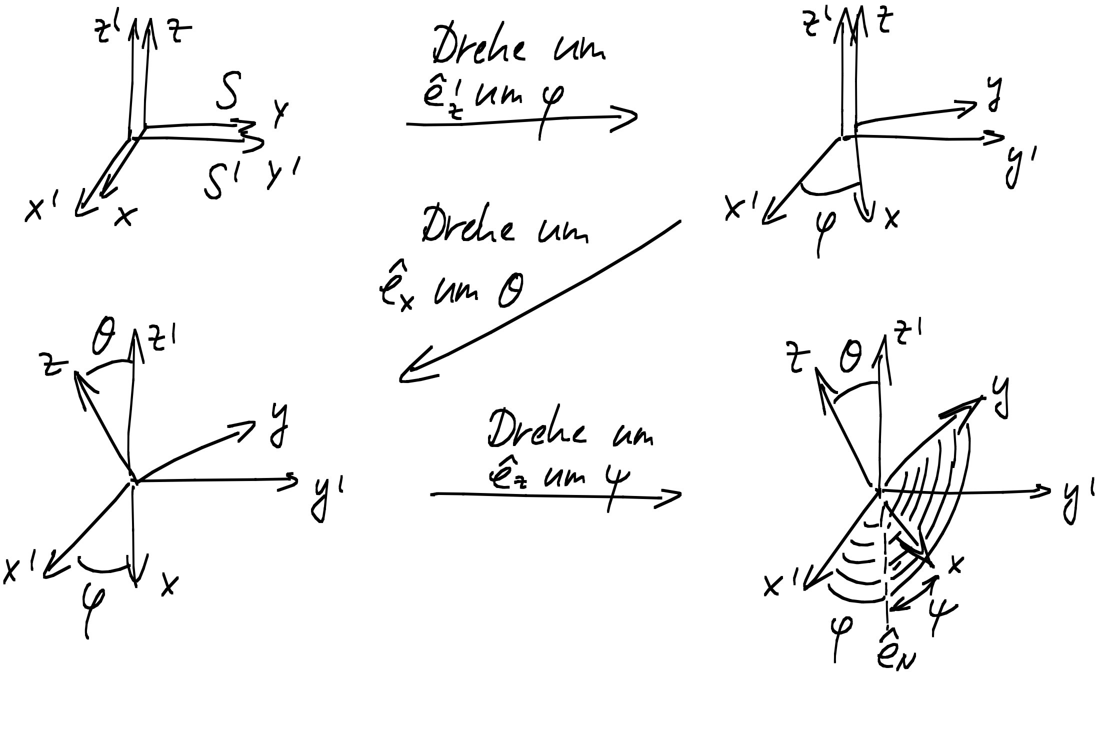
Beispiel Erde:



$\Rightarrow T \sim 26\,000$ Jahre ("Präzession der Äquinoktialpunkte"; "precession of the equinoxes")

11.6 Eulersche Winkel

Bequeme Art der Parametrisierung einer allg. Drehmatrix $\hat{=}$ Lage eines Kreisels $\hat{=}$ relative Lage zweier Koordinatensysteme S & S':



($\hat{e}_N$ charakterisiert die Schnittgerade von xy & $x'y'$ – Ebene)

Wenn sich nun φ, ψ, θ zeitlich verändern (also aus obiger Lage heraus weiter gedreht wird), gilt: $\bar{\omega} = \dot{\varphi}\,\hat{e}_z' + \dot{\psi}\,\hat{e}_z + \dot{\theta}\,\hat{e}_N$

[weil infinitesimale Drehungen (im Sinne von $(\mathbb{R}_{\Delta t} - \mathbb{1})$) additiv sind.]

11.7 Symm. Kreisel im Schwerefeld (Lagrange'scher Kreisel)

- Sei nun das System S von 11.6 das körperfeste Hauptachsensystem eines symm. Kreisels ($\Theta_1 = \Theta_2 \equiv \Theta_0$).

- Offensichtlich sind $\varphi \to \varphi + \Delta\varphi$; $\psi \to \psi + \Delta\psi$ Symmetrien des Systems (und der Lagrangefunktion).

  Grund: φ: wegen Rotationssymm. des Schwerefeldes
  ψ: wegen Rotationssymm. des Kreisels

$\Rightarrow$ φ & ψ sind zyklische Koordinaten

$\Rightarrow$ Wir können $\mathcal{L}$ für den Spezialfall $\varphi = \psi = 0$ suchen. Dann gilt:

$$\hat{e}_N = \hat{e}_x \; ; \; \hat{e}_z' = \hat{e}_z \cos\theta + \hat{e}_y \sin\theta$$

$$\Rightarrow \bar{\omega} = \hat{e}_x \underbrace{\dot{\theta}}_{\omega_1} + \hat{e}_y \underbrace{\dot{\varphi}\sin\theta}_{\omega_2} + \hat{e}_z \underbrace{(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta)}_{\omega_3}$$

ω_1-, ω_2-, ω_3- Komponenten von $\bar{\omega}$ im Körper-festen System

Also: $T = \frac{1}{2}\left[\Theta_0(\omega_1^2 + \omega_2^2) + \Theta_3\,\omega_3^2\right]$ (mit Θ bezogen auf den festen Pkt. des Kreisels)

$V = mg\,l\cos\theta$

Abstand des Schwerpkt.-es vom festen Punkt.

$$\Rightarrow \mathcal{L} = \frac{1}{2}\left[\Theta_0(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta) + \Theta_3(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta)^2\right] - mg\,l\cos\theta$$

(= endgültiges Ergebnis, obwohl nur für $\varphi = \psi = 0$ hergeleitet)

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot\varphi} = L_3' = \text{const.} \; ; \; \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot\psi} = L_3 = \text{const.}'$$

$$\left\| \begin{aligned} L_3' &= \dot\varphi\,(\Theta_0 \sin^2\theta + \Theta_3 \cos^2\theta) + \dot\psi\, \Theta_3 \cos\theta \\ L_3 &= \Theta_3\,(\dot\psi + \dot\varphi\cos\theta) \end{aligned} \right\|$$

Auflösen nach $\dot\varphi$ & $\dot\psi$ und Einsetzen in

$$\left\| E = \frac{1}{2}\left[\Theta_0(\dot\theta^2 + \dot\varphi^2 \sin^2\theta) + \Theta_3(\dot\psi + \dot\varphi\cos\theta)^2\right] + mgl\cos\theta \right\|$$

- $\dot\psi + \dot\varphi\cos\theta = \frac{L_3}{\Theta_3}$
- $L_3' = \dot\varphi(\Theta_0 \sin^2\theta + \Theta_3\cos^2\theta) + (L_3 - \Theta_3\dot\varphi\cos\theta)\cos\theta$

$$\Rightarrow L_3' - L_3\cos\theta = \dot\varphi\,\Theta_0 \sin^2\theta \Rightarrow \dot\varphi = \frac{L_3' - L_3\cos\theta}{\Theta_0 \sin^2\theta}$$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{2}\Theta_0\dot\theta^2 + \frac{1}{2}\frac{(L_3' - L_3\cos\theta)^2}{\Theta_0\sin^2\theta} + \frac{1}{2}\frac{L_3^2}{\Theta_3} + mgl\cos\theta$$

liefert: $E = \frac{1}{2}\Theta_0\dot\theta^2 + V_{eff}(\theta)$

$$\text{mit } V_{eff}(\theta) = mgl\cos\theta + \frac{L_3^2}{2\Theta_3} + \frac{(L_3' - L_3\cos\theta)^2}{2\Theta_0\sin^2\theta}$$

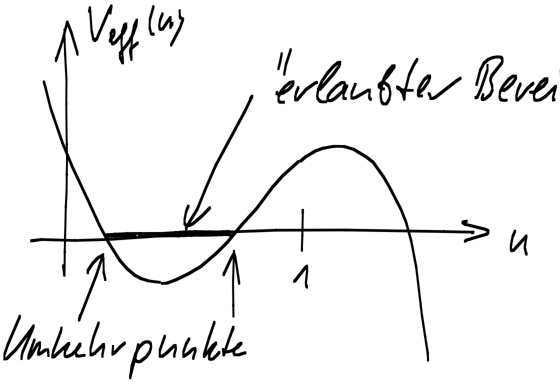
($\rightarrow$ äquivalentes 1-dim. Problem; prinzipiell lösbar wie in 2.4 erklärt)

Bessere Koordinate: $u = \cos\theta$ mit $\dot u = -\dot\theta\sin\theta$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{2}\Theta_0\frac{\dot u^2}{\sin^2\theta(u)} + V_{eff}(\theta(u))$$

$$0 = \dot u^2 + \underbrace{\frac{2}{\Theta_0}\left[\left(mglu + \frac{L_3^2}{2\Theta_3} - E\right)(1-u^2) + \frac{(L_3' - L_3 u)^2}{2\Theta_0}\right]}_{\text{Polynom 3. Grades in } u}$$

$$0 = \dot u^2 + \tilde V_{eff}(u)$$

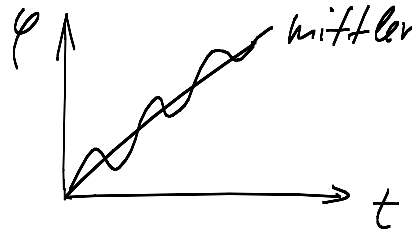


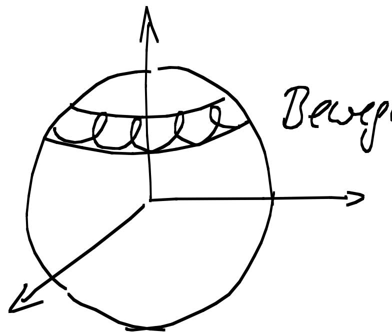
<u>Also:</u> u oszilliert zwischen u_{min} & u_{max}

$\Rightarrow$ θ oszilliert zwischen θ_{min} & θ_{max}.

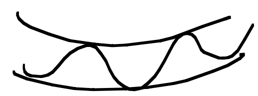
Währenddessen schreitet φ (ungleichmäßig) fort:

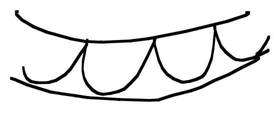
$$\dot{\varphi} = \frac{L_3' - L_3 \cos\theta}{\Theta_0 \sin^2\theta}$$





Bewegung des Kreisels, dargestellt auf Sphäre um festen Punkt (Fußpunkt)

auch möglich: 

& Grenzfall dazwischen 

(Dieser Grenzfall ist interessanterweise besonders praxisnah, da er einem angedrehten und dann in leicht schräger Lage losgelassenem Kreisel entspricht.)