12 D'Alembertsches Prinzip und Lagrangesche Gleichungen 1. & 2. Art

(Teils historisch motivierte "Herleitung" der Euler-Lagrange-Gl.-en aus der Newtonschen Mechanik; Nach wie vor aktueller Teil: Nichtholonome Zwangsbedingungen & "Lagrange 1".)

12.1 Arten von Zwangsbedingungen

Beispiele für Zwangsbedingungen:

1) Gasmoleküle in einem Kasten
2) Perle auf Draht a) Draht liegt fest im Raum
   b) Draht wird bewegt
3) Senkrecht auf einer Fläche stehendes Rad, das Rollen aber nicht rutschen kann
4) Durch masselose Stangen verbundene Punktmassen (unser Modell für starren Körper aus 1.6)

Zur Klassifikation:

- Falls die Zwangsbed.-en (oder "Zwänge") formulierbar sind als
$$\phi_\alpha(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_N, t) = 0 \quad ; \quad \alpha = 1 \cdots d \, ,$$
heißen sie holonom (falls t vorkommt – rheonom (2b), sonst – skleronom (2a, 4))

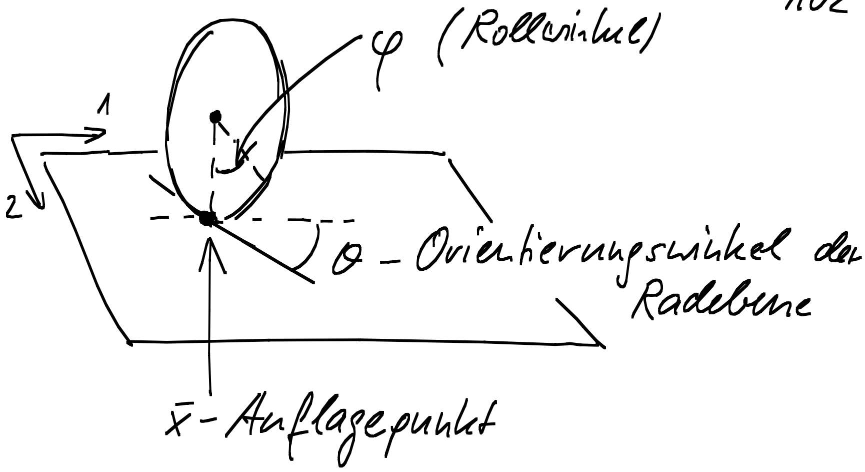
- Unter den nicht-holonomen Zwangsbedingungen sind speziell die von differentieller, nicht-integrierbarer Form interessant (3)

Zum Beispiel 3:

Zwänge:

$dx^1 = R\,d\varphi \cos\theta$

$dx^2 = R\,d\varphi \sin\theta$



Wenn sich (wenigstens eine) dieser Bedingungen ersetzen ließe durch

$$\Phi(x^1, x^2, \varphi, \theta) = 0$$

(In dem Sinne, daß $0 = d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x^1}dx^1 + \frac{\partial\phi}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial\phi}{\partial\varphi}d\varphi + \frac{\partial\phi}{\partial\theta}d\theta$ eine der differentiellen Bedingungen liefert),

dann könnte man nach φ auflösen:

$$\varphi = \varphi(x^1, x^2, \theta).$$

Das ist aber offensichtlich unmöglich, da man durch ein Herumrollen des Rades auf einem kleineren oder größeren Kreis zum gleichen (x^1, x^2, θ) bei beliebigem φ zurückkommen kann.

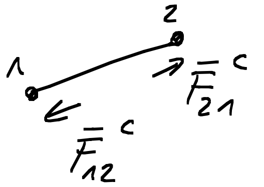
Daher der Name: holos (griech.) ⇔ integer (lat.) ⇔ ganz

Also: nicht-holonom ⇔ nicht-integrierbar

12.2 Prinzip der virtuellen Arbeit

In vielen Systemen verrichten <u>Zwangskräfte</u> keine Arbeit, z.B.

(1) starre Verbindungsstange

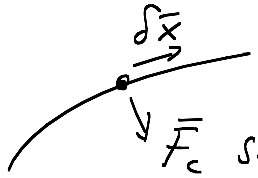


Für kleine Veränderung $(\bar{x}_{1,2} \to \bar{x}_{1,2} + \delta\bar{x}_{1,2})$ gilt

$$\delta A = \bar{F}_{12} \cdot \delta \bar{x}_1 + \bar{F}_{21} \cdot \delta \bar{x}_2 = \bar{F}_{12} \cdot (\delta \bar{x}_1 - \delta \bar{x}_2)$$

$$= \underbrace{\alpha \cdot (\bar{x}_1 - \bar{x}_2)}_{\text{weil } \bar{F} \,\|\, \text{Stange}} \cdot (\delta \bar{x}_1 - \delta \bar{x}_2) = \frac{\alpha}{2} \delta \left[(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)^2 \right] \underset{\text{weil Länge fix.}}{=} 0$$

② Perle auf Draht:



$\delta A = 0 \Leftarrow$ $\bar{F}_c$ stets orthogonal zu Draht und damit zu $\delta \bar{x}$

Dies gilt offensichtlich nicht mehr, falls der Draht bewegt wird (weil dann $\delta \bar{x}$ i.A. eine Komponente orthogonal zum Draht bekommt). δA bleibt aber Null im Fall der

<u>virtuellen Verrückung $\delta \bar{r}$</u>.

(gedachte Verrückung des Systems bei $t =$ const., die mit den Zwängen konsistent ist, aber sonst in keiner Weise als "echte Bewegung" aufgefaßt werden kann.)

$\Rightarrow$ <u>Prinzip der virtuellen Arbeit / Definition eines "glatt geführten" Systems:</u>

$$\boxed{\sum_a \bar{F}_a^c \cdot \delta \bar{x}_a = 0} \quad \text{für virt. Verrückung } \delta \bar{r}_a \ (a = 1 \dots N)$$

Daraus ergibt sich eine einfache Bedingung für das <u>Gleichgewicht:</u> im Gleichgewicht gilt $\bar{F}_a^{tot} = 0$.

$$0 = \bar{F}_a^{tot} = \bar{F}_a^c + \bar{F}_a$$

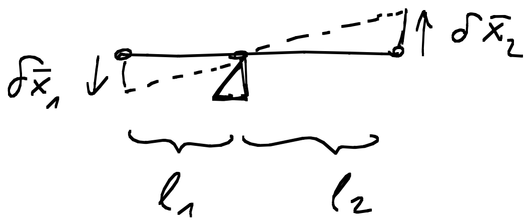
$\bar{F}_a$: "äußere Kräfte"

$\bar{F}_a^c$: "Zwangskräfte"

$$0 = \sum_a \bar{F}_a^{tot} \cdot \delta \bar{x}_a = \sum_a \bar{F}_a^c \delta \bar{x}_a + \sum_a \bar{F}_a \cdot \delta \bar{x}_a \Rightarrow \boxed{\sum_a \bar{F}_a \cdot \delta \bar{x}_a = 0}$$

im Gleichgewicht

Bsp.: Hebel:



$$\bar{F}_1 \cdot \delta\bar{x}_1 + \bar{F}_2 \cdot \delta\bar{x}_2 = 0 \; ; \quad \frac{|\delta\bar{x}_1|}{|\delta\bar{x}_2|} = \frac{l_1}{l_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{|\bar{F}_1|}{|\bar{F}_2|} = \frac{l_2}{l_1} .$$

12.3 D'Alembertsches Prinzip

(direkte Übertragung der obigen Gleichgewichtsbetrachtung auf den dynamischen Fall)

$$\bar{F}_a^{tot} = m_a \ddot{\bar{x}}_a \quad \Rightarrow \quad \sum_a \left(\bar{F}_a^{tot} - m_a \ddot{\bar{x}}_a \right) \cdot \delta\bar{x}_a = 0$$

Mit $\sum_a \bar{F}_a^{c} \cdot \delta\bar{x}_a = 0$ folgt daraus

d'Alembertsches Prinzip
$$\boxed{\sum_a \left(\bar{F}_a - m_a \ddot{\bar{x}}_a \right) \cdot \delta\bar{x}_a = 0}$$

nur äuß. Kräfte — virtuelle Verrückung eines "glatt geführten" Systems

12.4 D'Alembertsches Prinzip mit verallgemeinerten Koordinaten & Kräften

- Kartesische Beschreibung eines Systems: N Vektoren $\bar{x}_a$
- Zusätzlich gebe es: d holonome Zwangsbedingungen

$$\phi_\alpha(\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_N, t) = 0 \quad , \quad \alpha = 1 \cdots d$$

- Gehe über zur Beschreibung durch (3N−d) verallgemeinerte Koordinaten q_m, $m = 1 \cdots 3N-d$

[z.B. $\bar{x}_1 \cdots \bar{x}_N \to y_1, \cdots, y_{3N}$; Definiere $q_m \equiv y_a$ $(a = 1 \cdots 3N-d)$; Nutze $\phi_\alpha = 0$ um die restlichen $y_{3N-d+1} \cdots y_N$ durch q_m zu ersetzen.

Oft werden anders gewählte q_m (gewisse Winkel, Abstände, etc.) günstiger sein.]

- In jedem Fall hat man unter Ausnutzung der ϕ_α die expliziten Funktionen $\bar{x}_a = \bar{x}_a(q_1, \ldots, q_{3N-d}, t)$, $a = 1 \ldots N$.

- D'Alembert: $$\sum_a (\underbrace{\bar{F}_a}_{\text{äuß. Kräfte}} - m_a \ddot{\bar{x}}_a) \cdot \underbrace{\delta \bar{x}_a}_{\substack{\text{virtuelle Verrückungen} \\ \text{(respektieren Zwänge)}}} = 0$$

$$\delta \bar{x}_a = \sum_m \frac{\partial \bar{x}_a}{\partial q_m} \cdot \delta q_m \,, \quad \delta q_m \text{ beliebig}$$

(Zwänge automatisch respektiert)

① $$\sum_a \bar{F}_a \cdot \delta \bar{x}_a = \sum_{a,m} \bar{F}_a \cdot \frac{\partial \bar{x}_a}{\partial q_m} \delta q_m \equiv \sum_m Q_m \delta q_m$$

Q_m: <u>verallgemeinerte Kräfte</u>

② $$\sum_a \ddot{\bar{x}}_a \delta \bar{x}_a = \sum_{a,m} \ddot{\bar{x}}_a \cdot \frac{\partial \bar{x}_a}{\partial q_m} \delta q_m$$

$$= \sum_{a,m} \left[\frac{d}{dt} \left(\dot{\bar{x}}_a \frac{\partial \bar{x}_a}{\partial q_m} \right) - \dot{\bar{x}}_a \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \bar{x}_a}{\partial q_m} \right) \right] \delta q_m$$

<u>Nebenrechnung</u>: (zur Vereinfachung ohne Indizes)

a) $$x = x(q,t) \,, \quad \dot{x} = \frac{\partial x}{\partial q} \cdot \dot{q} + \frac{\partial x}{\partial t} \equiv \dot{x}(q, \dot{q}, t)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial x}{\partial q}$$

b) $$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial q}\right) &= \frac{\partial^2 x}{\partial q^2} \dot{q} + \frac{\partial^2 x}{\partial q \partial t} \\ \frac{\partial \dot{x}}{\partial q} &= \frac{\partial^2 x}{\partial q^2} \dot{q} + \frac{\partial^2 x}{\partial q \partial t} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial q}\right) = \frac{\partial \dot{x}}{\partial q}$$

$$\sum_a \ddot{\bar{x}}_a \cdot \delta \bar{x}_a = \sum_{a,m} \left[\frac{d}{dt} \left(\dot{\bar{x}}_a \frac{\partial \dot{\bar{x}}_a}{\partial \dot{q}_m} \right) - \dot{\bar{x}}_a \frac{\partial \dot{\bar{x}}_a}{\partial q_m} \right] \delta q_m$$

$$= \sum_{a,m} \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_m} \left(\frac{1}{2} \dot{\bar{x}}_a^2 \right) - \frac{\partial}{\partial q_m} \left(\frac{1}{2} \dot{\bar{x}}_a^2 \right) \right] \delta q_m$$

• Kombiniere ① & ② gemäß $\sum_a (\bar{F}_a - m_a \ddot{\bar{x}}_a) \delta \bar{x}_a = 0$

$$\Rightarrow \sum_m \left[Q_m - \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_m} - \frac{\partial}{\partial q_m} \right) T \right] \delta q_m = 0$$

Dies ist das d'Alembertsche Prinzip in verallg. Koordinaten.

mit $T = \sum_a \frac{m_a}{2} \dot{\bar{x}}_a^2$ (kinet. Energie)

Da die δq_m beliebig sind, verschwindet der Ausdruck in eckigen Klammern für jedes m

$\Rightarrow$ $(3N-d)$ Diff.gleichungen für $(3N-d)$ Variable q_m.
(Problem prinzipiell gelöst)

12.5 Lagrangesche Gleichungen 1. Art

• Die verallg. Koordinaten seien nun zusätzlich nichtholonomen differentiellen Zwangsbedingungen unterworfen:

$$\sum_m f_m^\alpha \, dq_m + f_t^\alpha \, dt = 0 \quad , \quad \alpha = 1 \cdots p$$

Funktionen der q's und von t

• Bei virtuellen Verrückungen gilt $\sum_m f_m^\alpha \delta q_m = 0$.

• Betrachte $\left\{ Q_m - \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_m} - \frac{\partial}{\partial q_m} \right) T \right\}, \{\delta q_m\}, \{f_m^\alpha\} (\alpha = 1 \cdots p)$ als Vektoren im $\mathbb{R}^{3N-d}$ (m ist der Vektor-Index).

- $\{\delta q_m\}$ ist virt. Verrückung $:\Leftrightarrow$ $\{\delta q_m\} \perp \mathrm{Span}\left[\{f_m^\alpha\}, \alpha = 1 \cdots p\right]$
  (d.h., ist orthogonal zu jedem der Vektoren $\{f_m^\alpha\}$.)

- d'Alembert besagt: $\{\delta q_m\} \perp \left\{ Q_m - \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot q_m} - \frac{\partial}{\partial q_m}\right) T \right\}$.
  (D.h. $\left\{ Q_m - \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot q_m} - \frac{\partial}{\partial q_m}\right) T \right\}$ ist orthogonal zu jedem Vektor aus dem orthogonalen Komplement zu $\mathrm{Span}\left[\{f_m^\alpha\}, \alpha = 1 \cdots p\right]$.)

$$\Rightarrow \left\{ Q_m - \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot q_m} - \frac{\partial}{\partial q_m}\right) T \right\} \in \mathrm{Span}\left[\{f_m^\alpha\}, \alpha = 1 \cdots p\right].$$

$\Rightarrow$ $\exists$ Funktionen $\lambda^\alpha(t)$ so daß

"Lagrange 1"
$$\left\| \begin{aligned} & Q_m - \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot q_m} - \frac{\partial}{\partial q_m}\right) T + \sum_\alpha \lambda^\alpha f_m^\alpha = 0 \\ & \sum_m f_m^\alpha \dot q_m + f_t^\alpha = 0 \end{aligned} \right\|$$

System von $(3N-d)+p$ Diff.gleichungen für die $(3N-d)+p$ Funktionen q_m & λ^α. Problem prinzipiell gelöst.

<u>Zur phys. Bedeutung der "Lagrange-Multiplikatoren" λ^α:</u>

Aus der Herleitung des d'Alembertschen Prinzips in verallg. Koordinaten (11.4) läßt sich folgendes technische Zwischenergebnis extrahieren:

$$\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot q_m} - \frac{\partial}{\partial q_m}\right) T = \sum_a m_a \ddot{\vec{x}}_a \cdot \frac{\partial \vec{x}_a}{\partial q_m}$$

Mit $m_a \ddot{\vec{x}}_a = \vec{F}_a^{tot} = \vec{F}_a + \vec{F}_a^c$ und

$$Q_m \equiv \sum_a \bar{F}_a \cdot \frac{\partial \bar{x}_a}{\partial q_m} \quad ; \quad Q_m^c \equiv \sum_a \bar{F}_a^c \frac{\partial \bar{x}_a}{\partial q_m}$$

folgt: $\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_m} - \frac{\partial}{\partial q_m}\right) T = Q_m + Q_m^c$.

Mit $Q_m - \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_m} - \frac{\partial}{\partial q_m}\right) T + \sum_\alpha \lambda^\alpha f_m^\alpha = 0$

ergibt sich: $\left\| \; Q_m^c = \sum_\alpha \lambda^\alpha f_m^\alpha \; \right\|$

$\Rightarrow$ Die Lagrange-Multiplikatoren bestimmen die verallg. Zwangskräfte.

<u>Kommentar:</u> Falls es keine (im ersten Schritt zu eliminierenden) holonomen Zwänge gibt, kann man die Lagrangeschen Gl.-en 1. Art auch direkt in kartes. Koordinaten formulieren. Man erhält

$$\left\| \begin{array}{l} F_m - m_m \ddot{x}_m + \sum_\alpha \lambda^\alpha f_m^\alpha = 0 \\ \sum_{m=1}^{3N} f_m^\alpha \dot{x}_m + f_t^\alpha = 0 \end{array} \right\| \quad (m = 1 \dots 3N)$$

und $\left\| \; F_m^c = \sum_\alpha \lambda^\alpha f_m^\alpha \; \right\|$

(m läuft über alle kartes. Koordinaten aller N Teilchen.)

<u>12.6 Lagrangesche Gl.-en 2. Art</u>

- Betrachte mech. System mit verallg. Koord.-en q_m ohne zusätzliche nichtholonome Zwänge. Die äuß. Kräfte seien konservativ:

$$\bar{F}_a = -\underbrace{\bar{\nabla}_a V(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_N)}$$ (Gradient bzgl. $\bar{x}_a$)

- verallg. Kräfte:

$$Q_m = \sum_a \bar{F}_a \cdot \frac{\partial \bar{x}_a}{\partial q_m} = - \sum_a \bar{\nabla}_a V(\bar{x}_1 \cdots \bar{x}_N) \cdot \frac{\partial \bar{x}_a}{\partial q_m}$$

$$= - \sum_{a=1}^{3N-d} \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial V(\bar{x}_1(q_1 \cdots q_{3N-d}), \dots, \bar{x}_N(q_1 \cdots q_{3N-d}))}{\partial (x_a^i)} \cdot \frac{\partial x_a^i(q_1 \cdots q_{3N-d})}{\partial q_m}$$

$$= - \frac{\partial}{\partial q_m} V(q_1 \cdots q_{3N-d}) = \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_m} - \frac{\partial}{\partial q_m} \right) V$$

- Einsetzen in d'Alembert, $Q_m - \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_m} - \frac{\partial}{\partial q_m} \right) T = 0$,

liefert:

$$\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_m} - \frac{\partial}{\partial q_m} \right) \underbrace{(V - T)}_{-\mathcal{L}} = 0$$

Damit haben wir die weiter oben aus dem Wirkungsprinzip abgeleiteten Euler-Lagrange-Gl.-en (≡ Lagrange-Gl.-en 2. Art) aus Newton (für "glatt geführte Systeme" und konservative äuß. Kräfte) gewonnen.