15 Kanonische Transformationen / Hamilton-Jacobi-Theorie

15.1 Punkttransformationen und kanonische Trf.-en

- Die Lagrangesche Formulierung der Mechanik ist invariant unter "Punkttransformationen":

$$q \longrightarrow Q(q,t) \,, \quad L(q,\dot q,t) \longrightarrow L'(Q,\dot Q,t)$$

(Wie immer, stehen q, Q für $\{q_1 \cdots q_n\}$, $\{Q_1 \cdots Q_n\}$)

- Man denke beim Übergang $q \to Q$ z.B. an $(x,y) \longrightarrow (r,\varphi)$ (kartesisch) $\to$ (polar-).
- $Q(q,t)$ sind im Prinzip beliebige Fkt.-en (wobei natürlich $\det\left(\frac{\partial Q_i}{\partial q_j}\right) \neq 0$ gelten muß).
- L' ist definiert durch die Forderung

$$L'(Q(q,t), \dot Q(q,\dot q,t), t) = L(q,\dot q,t).$$

- Daraus folgt

$$S' = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L'(Q(q,t), \dot Q(q,\dot q,t), t) = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L(q,\dot q,t) = S$$

$\Rightarrow$ Falls für eine gewisse Trajektorie $q(t)$ die Wirkung S extremal wird, so wird für $Q(t) = Q(q(t),t)$ die Wirkung S' extremal.

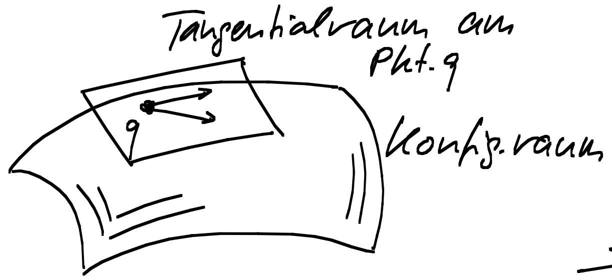
$\Rightarrow$ Die aus $L'(Q,\dot Q,t)$ und $L(q,\dot q,t)$ folgenden Lagrange-Gl.-en sind äquivalent.

- Übung: Prüfe explizit nach, daß

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \dot Q} - \frac{\partial L}{\partial Q} = 0 \,.$$

Geometrische Interpretation:

Die q_i parametrisieren einen Raum (den Konfigurationsraum).
Die $\dot{q}_i$ "leben" im "Tangentialraum" [Man denke sich an jedem Pkt. des Konfigurationsraumes einen (linearen) Raum der Geschwindigkeiten oder "Pfeile":



].

Die Lagrange'sche Formulierung bezieht sich auf diesen Raum (samt Tangentialraum an jedem Pkt.) "an sich". Sie ist damit von der Parametrisierung (durch q oder $Q(q)$) unabhängig.

[mathematisch präzise: Konzept der Mannigfaltigkeit mit Tangentialbündel]

- Die Hamiltonsche Mechanik bezieht sich auf den durch (q,p) parametrisierten <u>Phasenraum</u>. Wir können natürlich immer noch obige "Punkttransformationen" durchführen:

$$q \longrightarrow Q(q,t) \quad \text{(nahezu beliebig, wie oben)}$$
$$p \longrightarrow P(q,p,t) = \frac{\partial L'(Q,\dot{Q},t)}{\partial \dot{Q}}$$
$$\text{mit } Q = Q(q,t),\quad \dot{Q} = \dot{Q}(q,\dot{q},t)$$
$$\text{und } \dot{q} = \dot{q}(q,p,t) \quad \text{(wie beim Übergang von Lagrange zu Hamilton üblich)}$$

- Aber dies schöpft die Reparametrisierungsmöglichkeiten des Phasenraumes, die Hamilton-Dynamik respektieren nicht aus.

Wir definieren: Eine kanonische Trf. ist eine Trf. des Phasenraumes

$$(q,p) \longrightarrow (Q(q,p,t), P(q,p,t))$$

mit der Eigenschaft, daß es ein $H'(Q,P,t)$ gibt, so daß

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \quad \Longrightarrow \quad \dot{Q} = \frac{\partial H'}{\partial P}, \quad \dot{P} = -\frac{\partial H'}{\partial Q}.$$

(Die Kanon. Trf.-en sind eine Untermenge der allgemeinen Reparametrisierungen $Q(q,p,t)$, $P(q,p,t)$ und eine Obermenge der Punkttransformationen.) *) ↘ nächste Seite

15.2 Wirkungsprinzip der Hamilton-Mechanik
("modifiziertes Wirkungsprinzip")

[nützlich, um nichttriviale kanon. Trf.-en zu konstruieren]

$$\underbrace{S[q,p]}_{\text{Argumente des Funktionals}} = \int_{t_1}^{t_2} \Big(\sum_i p_i \dot{q}_i - H(q,p,t) \Big)$$

Phys. Bewegungen sind stationäre Punkte dieses Funktionals:

$$\delta S = 0$$ (wobei $q(t_1)$ & $q(t_2)$ fest und ansonsten $q(t)$ & $p(t)$ beliebig variiert werden).

Begründung:

$$\delta S = \int dt \left(\delta p\, \dot{q} + p \frac{d}{dt}(\delta q) - \frac{\partial H}{\partial q}\delta q - \frac{\partial H}{\partial p}\delta p \right)$$

$$= \int dt \underbrace{\left(\dot{q} - \frac{\partial H}{\partial p}\right)}\delta p + \int dt \underbrace{\left(-\dot{p} - \frac{\partial H}{\partial q}\right)}\delta q + \underbrace{p\,\delta q \Big|_{t_1}^{t_2}}_{0 \text{ nach Voraussetzung}} \overset{!}{=} 0$$

müssen verschwinden, falls $\delta p, \delta q$ allgemein | 0 nach Voraussetzung.
$\Rightarrow$ Hamilton-Gl.-en

*) <u>Einschub:</u>

Diese allgemeinere Sichtweise der kanon. Trf.-en als Reparametrisierungen des Phasenraumes läßt sich auch wie folgt formulieren:

$\bar{\xi} = \begin{pmatrix} \bar{q} \\ \bar{p} \end{pmatrix}$ parametrisiert Phasenraum. $\left[\begin{array}{l} \bar{q} = \{q_i\} \\ \bar{p} = \{p_i\} \end{array} ; \; i = 1 \cdots n \right]$

Ham. Gl.-en: $\dot{\xi}_i = J_{ij} \frac{\partial H}{\partial \xi_j}$; $J_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1\!\!1 \\ -1\!\!1 & 0 \end{pmatrix}_{ij}$; $i,j = 1 \cdots 2n$

Neue Variable: $\eta = \eta(\xi)$

ohne explizite Zeitabhängigkeit
(⇒ "restricted canonical trfs.)

$$\dot{\eta}_i = \underbrace{\frac{\partial \eta_i}{\partial \xi_j}}_{\equiv M_i{}^j} \dot{\xi}_j = M_i{}^j J_{jk} \frac{\partial H}{\partial \xi_k} = M_i{}^j J_{jk} \frac{\partial H}{\partial \eta_l} \cdot \frac{\partial \eta_l}{\partial \xi_k}$$

$$= M_i{}^j J_{jk} (M^T)^k{}_l \frac{\partial H}{\partial \eta_l}$$

In Matrizenschreibweise: $\dot{\eta} = M J M^T \left(\frac{\partial H}{\partial \eta} \right)$

⇒ $M J M^T = J$ ist die Bedingung dafür, daß diese Trf. kanonisch ist. Man nennt dies auch ein "symplektische" Bedingung. Matrizen M, die dies erfüllen, heißen symplektische Matrizen (und bilden eine Gruppe analog zu $SO(N)$, $SU(N)$ etc.).

Sei nun $S = \int dt\,(p\dot{q} - H)$ & $S' = \int dt\,(P\dot{Q} - H')$.

($\delta S = 0 \Rightarrow \delta S' = 0$) gilt offensichtlich, falls

$$(p\dot{q} - H) - (P\dot{Q} - H') = \frac{d}{dt} F(q, Q, t) \qquad \left(\text{weil } \delta \int dt\, \dot{F} = \right.$$

"Auflösen" nach dF $\Big\downarrow$ $\qquad\qquad\qquad \left. = \delta\left(F\Big|_{t_1}^{t_2}\right) = 0.\right)$

$$dF = p\,dq - P\,dQ + (H' - H)\,dt$$

bzw.: $p = \frac{\partial F}{\partial q}$, $P = -\frac{\partial F}{\partial Q}$, $H' = H + \frac{\partial F}{\partial t}$

15.3 Erzeugende Funktion(en) für die kanon. Trf.

- Aus obigem folgt (jetzt wieder mit Indizes):

  Gegeben $H(q, p, t)$ & $F(q, Q, t)$ ("erzeugende Fkt."), können wir $Q_i = Q_i(q, p, t)$ & $P_i = P_i(q, p, t)$ definieren durch auflösen der $2n$ Gleichungen

  $$\left\| \; p_i = \frac{\partial F(q, Q, t)}{\partial q_i} \quad \& \quad P_i = -\frac{\partial F(q, Q, t)}{\partial Q_i} \; \right\|$$

  nach den Variablen Q, P. Gemäß 15.2 ist dann $\left\| H' = H + \frac{\partial F}{\partial t} \right\|$ die neue Hamilton-Fkt. und es gilt:

$q(t), p(t)$ erfüllen H-Hamilton-Gl.-en $\Rightarrow$ $Q(t), P(t)$ erfüllen H'-Hamilton-Gl.-en

$\Rightarrow$ <u>Wir haben eine kanon. Trf. "erzeugt"!</u>

- Wir können die durch $F(q, Q, t) \equiv F_1(q, Q, t)$ erzeugte kanon. Trf. auch erzeugen durch $\longrightarrow$

$$\left\{\begin{array}{l} F_2(q, P, t) \\ F_3(p, Q, t) \\ F_4(p, P, t) \end{array}\right\} \text{ Legendre-Transformierte von } F_1$$

- <u>Explizit $F_1 \to F_2$:</u> $dF_1 = p\,dq - P\,dQ + (H' - H)dt$

$$d(\underbrace{F_1 + PQ}_{\equiv F_2}) = p\,dq + Q\,dP + (H' - H)dt$$

$\equiv F_2$ mit $p = \frac{\partial F_2}{\partial q}$, $Q = \frac{\partial F_2}{\partial P}$

Also: Gegeben $H(q,p,t)$ & $F_2(q,P,t)$ definieren wir $Q = Q(q,p,t)$ & $P(q,p,t)$ durch Auflösen von $p = \frac{\partial F_2}{\partial q}$, $Q = \frac{\partial F_2}{\partial P}$ nach Q und P und $H' = H + \frac{\partial F_2}{\partial t}$. Dies ist eine kanon. Trf.

<u>Bsp. 1:</u> $F_1 = q \cdot Q$

$$p = \frac{\partial F_1}{\partial q}, \quad P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q} \Rightarrow p = Q, \quad P = -q$$

bzw.

$$\begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{} \cdot \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}$$

90°-Drehung im Phasenraum.

<u>Fakt:</u> Die Hamilton-Fkt. $H = \frac{1}{2}(p^2 + q^2)$ (harm. Osz.) ist dabei "forminvariant"

<u>Bsp. 2:</u> $F_2 = q \cdot P$

$$p = \frac{\partial F_2}{\partial q}, \quad Q = \frac{\partial F_2}{\partial P} \Rightarrow p = P, \quad Q = q$$

(identische Trf.)

[Dies kann nicht durch F_1 beschrieben werden, da die Leg. Trf. das Auflösen von $\frac{\partial F_2}{\partial P} = Q$ nach P erfordert, was nicht geht.]

15.4 Infinitesimale kanon. Trf.-en

- Sei $F_2(q,P) = \underbrace{q\cdot P}_{\text{ident. Trf.}} + \varepsilon \cdot G(q,P)$ [Zur Vereinfachung haben wir $\sum_i q_i P_i \to q\cdot P$ gesetzt und explizite t-Abhäng. von G unterdrückt!]

  "infinites. Param." (ε)

$$\Big\Downarrow \; p = \frac{\partial F_2}{\partial q}, \; Q = \frac{\partial F_2}{\partial P}$$

$$p = P + \varepsilon \frac{\partial G}{\partial q} \quad , \quad Q = q + \varepsilon \frac{\partial G}{\partial P}$$

oder (mit $P = p + \Delta p$, $Q = q + \Delta q$)

$$\Delta p = -\varepsilon \frac{\partial G}{\partial q} \quad , \quad \Delta q = \varepsilon \frac{\partial G}{\partial P}$$

In diesen Ausdrücken können wir $q = Q$ & $p = P$ setzen, da der Effekt insgesamt $O(\varepsilon^2)$ wäre.

- Gegeben eine Observable $G(q,p)$ (Fkt. auf dem Phasenraum eines Hamiltonschen Problems). Die durch $F_2(q,P) = q\cdot P + \varepsilon G(q,P)$ definierte Kanon. Trf. führt zu

$$\Delta p = -\varepsilon \frac{\partial G(q,p)}{\partial q} \quad , \quad \Delta q = \varepsilon \frac{\partial G(q,p)}{\partial p}$$

(wobei wir $P \to p$ ersetzt haben und die entstehenden Fehler $O(\varepsilon^2)$ akzeptieren)

- Obiges kann auch geschrieben werden als

$$\Delta p = \varepsilon \{p, G\} \quad , \quad \Delta q = \varepsilon \{q, G\}.$$

(Identisch mit der Zeitentwicklung um $\Delta t = \varepsilon$, die durch die "Hamilton-Fkt" $G(q,p)$ generiert wird.)

- Frage: Wenn eine Hamilton-Fkt. $H(q,p)$ gegeben ist, wie sieht die transformierte Hamilton-Fkt. $H'(Q,P)$ aus?

$$H'(Q,P) = H(q,p) + \underbrace{\frac{\partial F_2}{\partial t}}_{=0} = H(Q-\Delta q, P-\Delta p)$$

$$= H(Q,P) \underbrace{- \Delta q \frac{\partial H(Q,P)}{Q} - \Delta p \frac{\partial H(Q,P)}{\partial P}}$$

dieser Ausdruck ist $O(\varepsilon)$; wir können also jetzt $p \leftrightarrow P$, $q \leftrightarrow Q$ beliebig austauschen

$$= H(Q,P) - \varepsilon \frac{\partial G}{\partial p}\frac{\partial H}{\partial q} + \varepsilon \frac{\partial G}{\partial q}\frac{\partial H}{\partial p}$$

Also:
$$H'(Q,P) = H(Q,P) + \varepsilon \underbrace{\{G,H\}}_{=0}$$

$$\Updownarrow$$

G-Erhaltungsgröße

$$\Updownarrow$$

Obige kanon. Trf. ist Symmetrie

- Damit haben wir die Umkehrung des Noether-Theorems:

Erhaltungsgröße G $\Longrightarrow$ kanon. Trf., die eine Symmetrie der Hamiltonschen Beschreibung des Systems darstellt.

15.5 Hamilton-Jacobi-Theorie (nur Idee)

- Suche kanon. Trf., die zu $H' = 0$ (besonders einfach!) führt.
- Benutze $H' = H + \frac{\partial F_2}{\partial t}$ mit $p = \frac{\partial F_2}{\partial q}$ & $Q = \frac{\partial F_2}{\partial P}$.

$$\Rightarrow \boxed{0 = H\left(q, \frac{\partial F_2}{\partial q}, t\right) + \frac{\partial F_2}{\partial t} = 0}$$ Hamilton-Jacobi-Dgl.

ist durch geeignetes $F_2(q, P, t)$ zu lösen.

- Dies ist eine partielle Dgl. 1. Ordnung in den $n+1$ Variablen $q_1, \dots, q_n, t$.
- Wir brauchen eine "vollständige Lösung" mit $n+1$ freien Parametern. (Nicht zu verwechseln mit der "allg. Lösung", die unbestimmte Funktionen ($\hat{=}$ ∞ viele Parameter) enthält.)
- Ansatz: $F_2 = S(q_1, \dots, q_n, t, \alpha_1 \dots \alpha_n) + \alpha_{n+1}$

Einer der $n+1$ Parameter ist additiv, da nur Ableitungen von F_2 in die Dgl. eingehen.

- Definiere die neuen Impulse als $P_i = \alpha_i$ $(i = 1 \dots n)$:

$$F_2 = S(q_1 \dots q_n, P_1 \dots, P_n, t) + \alpha_{n+1}$$

- Da $\dot{Q}_i = \frac{\partial H'}{\partial P_i} = 0$ & $\dot{P}_i = -\frac{\partial H'}{\partial Q_i} = 0$, bleiben

die $Q_i \equiv \beta_i$ (ebenso wie die $P_i \equiv \alpha_i$) bei der Bewegung konstant.

$$Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i} \Rightarrow \beta_i = \frac{\partial S(q, \alpha, t)}{\partial \alpha_i}$$

aufzulösen nach den q_i.

$$\Rightarrow \boxed{q_i = q_i(\underbrace{\alpha, \beta}_{\substack{2n \text{ Parameter} \\ \equiv \text{Anfangsbedingungen}}}, t)}$$

Problem prinzipiell gelöst!

Intuitiv: Wir haben eine kanon. Trf. gefordert, welche die von H definierte dynamische Bewegung gerade kompensiert. Wenn wir die haben, wird die Bewegung in P_i, Q_i trivial.

Beispiel: $H = \frac{p^2}{2m}$ ---> Dgl.: $\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial F_2}{\partial q}\right)^2 + \frac{\partial F_2}{\partial t} = 0$

Separationsansatz (immer OK wenn H nicht explizit von t abhängt):

$$F_2(q,t) = W(q) + f(t)$$

$$\text{Dgl.} \Rightarrow \underbrace{\frac{1}{2m} W'(q)^2}_{q\text{-unabhängig}} + \underbrace{f'(t)}_{t\text{-unabhängig}} = 0$$

$$\Rightarrow f(t) = -\alpha_1 t \quad ; \quad W(q) = \sqrt{2m\alpha_1} \cdot q + \alpha_2$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial \alpha_1} = \frac{\partial S}{\partial \alpha_1} = \beta_1 \xrightarrow{\text{Auflösen nach } q} q = \sqrt{\frac{2E}{m}}(t + \beta_1) = \underline{\underline{v_0 t + q_0}}$$

Kommentar: $\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial q}\dot{q} = -H + p\dot{q} = L$

$= S = \int dt\, L$; S heißt "Hamiltonsche Wirkungsfunktion".