16 Integrable & nicht-integrable Systeme, Chaos

16.1 Integrabilität

Ein System mit n Freiheitsgraden heißt integrabel, wenn es n unabhängige Erhaltungsgrößen f_i $(i = 1 \cdots n)$ gibt, deren Poissonklammern verschwinden: $\{f_i, f_j\} = 0$.

- Dann läßt sich eine kanon. Trf. finden, so daß $f_i = P_i$ die neuen kanonischen Impulse sind.

- Die obige Forderung $\{f_i, f_j\}\big|_{\text{in } p,q} = 0$ ist dafür notwendig, da $\{P_i, P_j\}_{P,Q} = 0$ ganz allgemein gilt ("kanonische Poiss.-kl. relationen) und da die kanon. Trf. $p,q \to P,Q$ Poissonklammern respektiert.

Letzteres machen wir uns am Beispiel infinitesimaler kanon. Trf-en klar (endliche kanon. Trf.-en kann man sich meist aus infinitesimalen zusammengesetzt denken).

Sei $P = p + \Delta p$, $Q = q + \Delta q$ eine kleine kanon. Trf., die durch $F_2 = qP + \varepsilon G(q,P)$ generiert wird. Fasse G als Fkt. von q, p auf und schreibe: (für beliebige Observable F, J)

$$\Delta F = F(q+\Delta q, p+\Delta p) - F(q,p) = \varepsilon\{F, G\}$$

$$\Delta\{F, J\} = \varepsilon\{\{F,J\}, G\} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Jacobi-Id.}}}{=} \varepsilon\{\{F,G\}, J\} + \varepsilon\{F, \{J,G\}\}$$

$$= \{F + \Delta F, J + \Delta J\} - \{F, J\}$$

bzw. $\{F, J\} + \Delta\{F, J\} = \{F + \Delta F, J + \Delta J\}$

⇒ Es ist egal, ob man erst kanon. Transformiert und dann die Poissonklammer bildet oder umgekehrt

- $\dot{P}_i = 0 = -\frac{\partial H'}{\partial Q_i}$ impliziert, daß die neue Hamilton-Funktion nicht von den Q_i abhängt ("alle Q_i sind zyklisch").

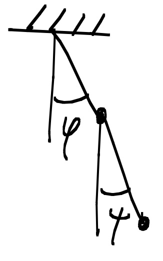
- Die Bewegung ist sehr einfach: $\dot{Q}_i = \frac{\partial H(P)}{\partial P_i} = \text{const.}$

$$\Rightarrow Q_i = Q_i^0 + t \cdot \frac{\partial H(P)}{\partial P_i}$$

Beispiele integrabler Systeme:

- 1-dim. Bewegung: $n = 1$, 1 Erhaltungsgröße: H
- 2-Körper-Problem: $n = 6$, 6 Erhaltungsgrößen: $H, \bar{P}, L_z, \bar{L}^2$
(Zentralpotential) (L_x, L_y nützen hier nichts, da $\{L_x, L_z\} \neq 0$, $\{L_y, L_z\} \neq 0$)

Beispiel für nicht-integrables System:

- Doppelpendel , $n = 2$, 1 Erhaltungsgröße: H
(Natürlich ist jede Fkt. $f(H)$, z.B. H^2, auch erhalten, aber dies ist dann nicht von H unabhängig.)

Explizite Durchführung des Überganges zu den neuen Variablen $P_i = f_i$ & Q_i: gegeben $H(q_1 \cdots q_n, p_1 \cdots p_n)$ & n Erhaltungsgrößen $f_i(q, p)$

- Definiere $P_i = f_i(q,p)$ für $i = 1 \cdots n$ und löse nach den p_i auf: $\Rightarrow \quad p_i = p_i(q,P) \quad$ (mit $P = P_1, \ldots, P_n$)

- Bezeichne mit $\{q_i\}$ einen Punkt im n-dimensionalen Konfigurationsraum. Sei $\{q_i^0\}$ ein beliebiger aber fest gewählter derartiger Punkt. Definiere:

$$F_2 = F_2(q,P) = \underbrace{\int_{\{q_i^0\}}^{\{q_i\}}}_{\text{Linienintegral im Konfigurationsraum}} \sum_j dq_j' \cdot p_j(q', P)$$

- Zentrale Behauptung ("Lemma"):
  <u>Dieses Integral hängt nicht vom Weg ab</u>.

  [Dies ist analog zum Linienintegral, das in der Definition des Potentials einer konservativen Kraft (→ 2.3) auftritt. Die Voraussetzung für die Wegunabhängigkeit ist im Fall $n=3$ ganz analog: $\quad \mathrm{rot}_{\bar q}\, \bar p(\bar q, \bar P) = 0 \qquad (\bar q = (q_1, q_2, q_3)$ etc.$)$

  – für beliebige n: $\quad \dfrac{\partial p_i}{\partial q_j} - \dfrac{\partial p_j}{\partial q_i} = 0$

  – dies läßt sich unter Ausnutzung von $\{P_i, P_j\} = 0$ nachrechnen (→ Nebenrechnung auf nächster Seite).]

- Wenn wir nun die Wegunabhängigkeit obiger Definition von F_2 akzeptieren, so können wir den Weg so wählen, daß das letzte Wegstück <u>parallel zur q_k-Achse verläuft</u>:

$$\Rightarrow \frac{\partial F_2}{\partial q_k} = \frac{\partial}{\partial q_k}\left[\int^{q_k} dq_k'\, p_k(q_1 \cdots q_k' \cdots q_n, P) + \cdots\right] = p_k$$

Nebenrechnung:

- Wir wollen zeigen, daß $\frac{\partial p_i}{\partial q_j} - \frac{\partial p_j}{\partial q_i} = 0$

  wobei hier $p_i = p_i(q, P)$.

- Mit anderen Worten: Es ist zu zeigen, daß die $n \times n$-Matrix $\left(\frac{\partial p}{\partial q}\right)$ symmetrisch ist.

- Einsetzen von $P_i = P_i(q, p)$ in $p_j = p_j(q, P)$ liefert die Identität

$$p_j(q_1, \dots, q_n, P_1(q_1 \cdots q_n), \dots, P_n(q_1 \cdots q_n)) = p_j .$$

- Partielles Ableiten nach p_i liefert $\frac{\partial p_j}{\partial P_k} \cdot \frac{\partial P_k}{\partial p_i} = \delta^{ij}$

  bzw. (in Matrix-Schreibweise):

$$\left(\frac{\partial p}{\partial P}\right)\left(\frac{\partial P}{\partial p}\right) = \mathbb{1} . \qquad (*)$$

- Partielles Ableiten nach q_i liefert

$$\frac{\partial p_j}{\partial q_i} + \frac{\partial p_j}{\partial P_k} \cdot \frac{\partial P_k}{\partial q_i} = 0 .$$

  hier wird, wie auch oben, $p_j(q, P)$ bei festem P abgeleitet.

- In Matrixschreibweise: $\left(\frac{\partial p}{\partial q}\right) + \left(\frac{\partial p}{\partial P}\right)\left(\frac{\partial P}{\partial q}\right) = 0 .$

- Wir brauchen jetzt nur noch zu zeigen, daß die Matrix $A \equiv \left(\frac{\partial p}{\partial P}\right)\left(\frac{\partial P}{\partial q}\right)$ symm. ist, da dann die Symmetrie der Matrix $\left(\frac{\partial p}{\partial q}\right)$ folgt.

(Fortsetzung der Nebenrechnung)

- Mit (*) finden wir $A = \left(\frac{\partial P}{\partial p}\right)^{-1}\left(\frac{\partial P}{\partial q}\right)$.
- Das Verschwinden der Poissonklammern der P_i's,

$$\frac{\partial P_i}{\partial q_k}\cdot\frac{\partial P_j}{\partial p_k} = \frac{\partial P_i}{\partial p_k}\cdot\frac{\partial P_j}{\partial q_k},$$

bedeutet in Matrixschreibweise

$$\left(\frac{\partial P}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial P}{\partial p}\right)^T = \left(\frac{\partial P}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial P}{\partial q}\right)^T.$$

- Daraus folgt $\left(\frac{\partial P}{\partial p}\right)^{-1} = \left(\frac{\partial P}{\partial q}\right)^T\left(\frac{\partial P}{\partial p}\right)^{T,-1}\left(\frac{\partial P}{\partial q}\right)^{-1}$.
- Für A ergibt sich damit

$$A = \left(\frac{\partial P}{\partial q}\right)^T\left(\frac{\partial P}{\partial p}\right)^{T,-1}\left(\frac{\partial P}{\partial q}\right)^{-1}\left(\frac{\partial P}{\partial q}\right) = \left(\frac{\partial P}{\partial q}\right)^T\left(\frac{\partial P}{\partial p}\right)^{T,-1}$$

$$= \left[\left(\frac{\partial P}{\partial p}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{\partial P}{\partial q}\right)\right]^T = A^T. \checkmark$$

- Wenn wir noch die neuen Koordinaten Q_i durch

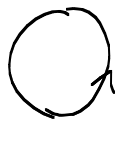
$$Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i}$$ definieren, folgt daß

$F_2(q,P)$ die kanon. Trf. erzeugt, welche zu Q_i & $P_i = f_i$ führt.

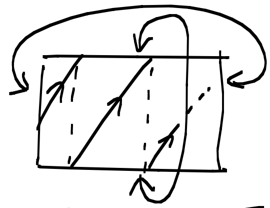
Dies schließt die Demonstration des expliziten Überganges zu den kanon. Impulsen $P_i = f_i$ ab.

Wichtige Tatsache (ohne Beweis)

Im integrablen Fall findet die allgemeinste kompakte Bewegung auf einem Torus (T^n) statt.

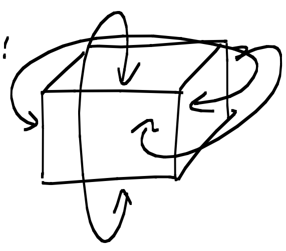
$n=1$: $T^1 = S^1$ (Kreis):  $Q = \varphi$, $\varphi \in [0, 2\pi)$

Bewegung: $\varphi = \varphi_0 + t \cdot \text{const.}$

$n=2$: T^2:  (T^2 eingebettet in $\mathbb{R}^3$) oder 

Trajektorie wird den Torus i.A. dicht überdecken (nicht periodisch sondern "quasiperiodisch", Bewegung ist i.A. "ergodisch")

(T^2 definiert durch Identifikation gegenüberliegender Seiten.)

$n=3$ T^3:  Wieder: Quader mit Identifikation gegenüberliegender Seiten.

(analog für $n>3$)

16.2 Chaos

- Betrachte eine kleine Bewegung eines kleinen sphärischen Volumens im Phasenraum:

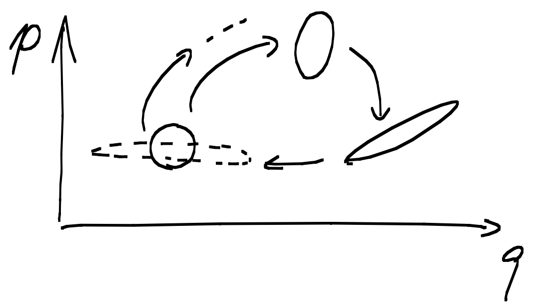
$$V(t=0) \sim r^{2n} \longrightarrow V(t\neq 0) = V(t=0)$$

(Liouville)

Kugel: $\bigcirc$ (Radius r) $\longrightarrow$ Ellipsoid: $\bigcirc$ (Halbachsen a_i)

(dies gilt nur im Grenzwert $r \to 0$ bei festen t)

- Gesamtbild:



Da diese Dynamik von Dgl.-en 1. Ordnung beschrieben wird, ist schnellstmögliche Wachstum von Abständen exponentiell:

$$a_i(t) \sim e^{\lambda_i t} r$$

(für kleine r)

- Die hierbei auftretenden λ_i heißen "Lyapunov-Exponenten".

- Genauere Definition: $\lambda_i = \lim\limits_{t\to\infty} \lim\limits_{r\to 0} \frac{1}{t} \ln\left(\frac{a_i(t)}{r}\right)$

- Wegen des Satzes v. Liouville gilt:

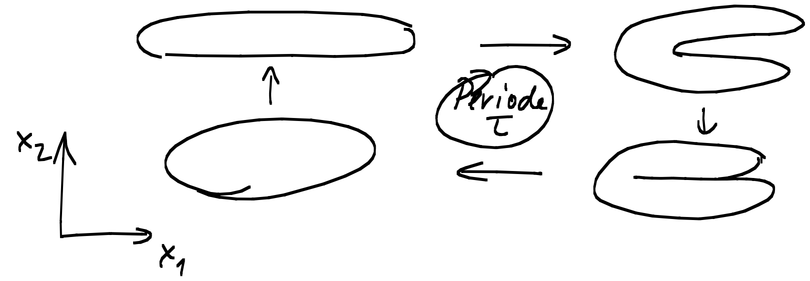
$$\prod_{i=1}^{2n} \left(e^{\lambda_i t} r\right) = r^{2n} \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{2n} \lambda_i = 0$$

- Für integrable Systeme ist nur lineares Wachstum möglich (weil $P_i = \text{const.}$, $\dot{Q}_i = \text{const.} \Rightarrow Q_i = t\cdot\text{const.} + Q_i^0$)

$\Rightarrow \lambda_i = 0$ für $i = 1 \dots 2n$ (weil $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{1}{t}\ln t = 0$).

- Chaotische Systeme sind dadurch definiert, daß für mindestens ein i gilt: $\lambda_i > 0$

- Da der Fall $n=1$ stets integrabel ist, kann man kein anschauliches Beispiel im 2-dim. Phasenraum geben. Ein etwas künstliches Beispiel (keine echte hamiltonsche Dynamik) liefert die "Bäcker-Transformation"



(Volumen bleibt erhalten)

Berechne horizontalen Abstand zweier benachbarter Punkte (Abstand r bei $t=0$) nach N Perioden:

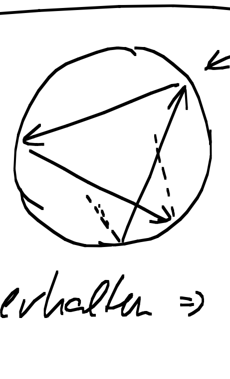
$$a_1 = 2^N r = 2^{t/\tau} r$$

$$\lambda_1 = \lim_{t\to\infty} \lim_{r\to 0} \frac{1}{t} \ln\left(\frac{2^{t/\tau} r}{r}\right) = \frac{1}{\tau} \cdot \ln \tau > 0$$

$\Rightarrow$ Chaos

- anderes Beispiel: "Billiard"

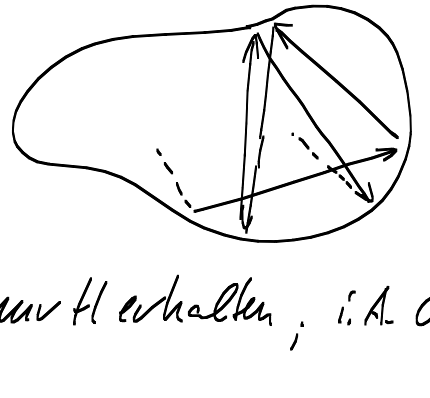
rundes Billiard:



$\leftarrow$ jeweils perfekte Reflexion

H, L erhalten $\Rightarrow$ integrabel

allgemeines Billiard

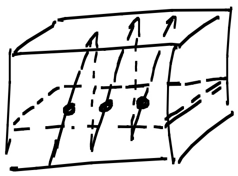


nur H erhalten; i.A. Chaos

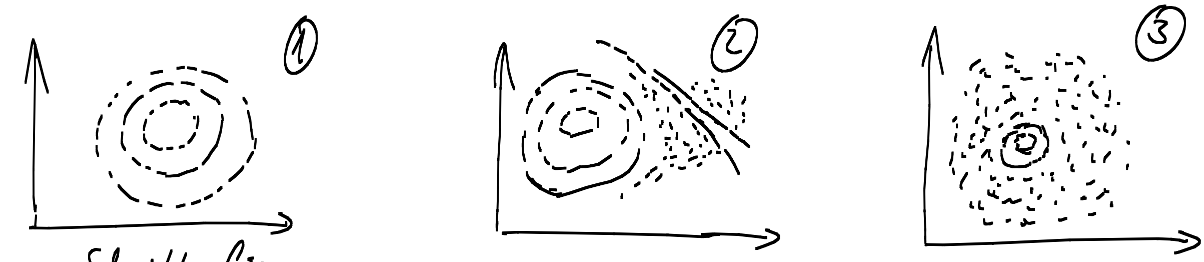
- Eine Methode zur Veranschaulichung chaotischen Verhaltens in echten hamiltonschen Systemen ($n \geq 2$) sind die Poincare-Schnitte (<u>Poincare slices</u>):

- $n = 2$ (z.B. Doppelpendel) $\Rightarrow$ Phasenraum 4-dimensional

- H erhalten $\Rightarrow$ Einschränkung auf 3-dim. Unterräume mit jeweils konstanter Energie.

z.B. T^3:  ← wähle bestimmten 2-dim.-Unterraum aus

Die Trajektorie durchstößt den Poincare-Schnitt viele Male. Zeichne diese Punkte in der Poincare-Ebene ein und betrachte das nach langer Zeit entstehende Muster:



Poinc.-Schnitt für Doppelpendel bei kleiner Auslenkung (schematisch) ⟶ Auslenkung nimmt zu (Übergang zum Chaos)

"KAM:"
nach
Kolmogorov
Arnold
Moser, '54-'67

Beim Übergang vom "lokalen" zum "globalen" Chaos (wie etwa 2 → 3 im Bild) werden sogenannte "KAM-Tori", die versch. chaotische Regionen trennen, "zerbrochen."