3 Symmetrien der Raum-Zeit

3.1 Der euklidische Raum

Wir haben den phys. Raum bisher als Vektorraum V ($\mathbb{R}^3$) beschrieben. Tatsächlich brauchen wir aber etwas mehr Struktur, z.B. um den Abstand $|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|$ zu messen. Eine Möglichkeit ist, auf V ein Skalarprodukt zu definieren:

$$V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(\bar{x}, \bar{y}) \longmapsto \bar{x} \cdot \bar{y} = x^i y^i$$

und den Abstand als $|\bar{x}_1 - \bar{x}_2| = \sqrt{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \cdot (\bar{x}_1 - \bar{x}_2)}$ zu definieren.

|| Der $\mathbb{R}^3$ mit dem (üblichen, siehe oben) Skalarprodukt ist der euklidische Raum. ||

- Wir sprechen von einer Symmetrie eines Raumes, wenn es eine Abb. gibt:

$$V \longrightarrow V$$
$$\bar{x} \longmapsto \bar{x}' \, ,$$

die "die Struktur des Raumes" respektiert.

- "Struktur" ist hier 1) lineare Struktur
  2) Skalarprodukt

- Sei R eine solche Symmetrietransformation. Dann bedeutet

$$1) \Rightarrow \quad R(\alpha \bar{x} + \beta \bar{y}) = \alpha R(\bar{x}) + \beta R(\bar{y})$$

$$2) \Rightarrow \quad R(\bar{x} \cdot \bar{y}) \underset{\uparrow}{\equiv} \bar{x} \cdot \bar{y} = R(\bar{x}) \cdot R(\bar{y})$$

R operiert nur auf V, nicht auf $\mathbb{R}$.

- Bedingung 1) wird erfüllt von allg. linearen Transformationen:

$$x^i \longrightarrow x'^i = R^{ij} x^j$$

oder in Matrixschreibweise: $x \longrightarrow x' = Rx$

3x3-Matrix ↗ (zu R)

↑ 3-elementiger Spaltenvektor

(Der Vektorpfeil wird in dieser Schreibweise oft weggelassen.)

Beachte: Wir benutzen das Symbol R ab sofort für obige Matrix. Die abstrakte Abb. $\bar{x} \to R(\bar{x})$ werden wir nicht mehr brauchen.

- Bedingung 2) führt zur Einschränkung der Form von R:
  - $\bar{x} \cdot \bar{y} = x^T y$, mit "T" für transponiert, in unserer Spaltenvektor-Schreibweise
  - Bedingung 2) $\Rightarrow x^T y = x'^T y'$

    bzw. $x^T y = (Rx)^T (Ry) = x^T R^T R y$
  - Damit dies für beliebige x, y gilt, muß $\underline{\underline{R^T R = \mathbb{1}}}$ sein.

Also: Die Symmetrie des euklid. Raumes ist gegeben durch $x \to Rx$ mit R - eine 3x3 Matrix, die $R^T R \equiv \mathbb{1}$ erfüllt.

3.2 Orthogonale Transformation

- $R^T R = \mathbb{1}$ bedeutet, daß R eine orthogonale Matrix ist:

  $R \in O(3) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Untermenge der invertierbaren } 3\times 3 \text{ Matrizen } GL(3).}}{\subset} GL(3)$

- Das Ganze ist leicht verallgemeinerbar auf $O(N)$ & $GL(N)$.
- Symmetrien werden i.A. durch Gruppen beschrieben. Die hier gefundene Matrixgruppe $O(N)$ ist ein einfaches Beispiel. Dies erklärt die zentrale Rolle des Gruppenbegriffs in der Physik.
- Zur Erinnerung: Gruppenaxiome

  Eine Gruppe ist eine Menge G mit einer Produktoperation $G \times G \to G$ für die gilt:
  - Assoziativität: $(a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c)$
  - Existenz der "Eins" e: $a\cdot e = e\cdot a = a$ für alle a
  - Existenz des Inversen a^{-1} zu jedem a: $a\cdot a^{-1} = a^{-1}\cdot a = e$.
- Aus $R^T R = \mathbb{1}$ folgt $\det(R^T R) = \det R^T \det R = (\det R)^2 = 1$.

  $\Rightarrow$ $\underline{\det R = \pm 1}$.

  1) $\det R = 1$ heißt $R \in \underbrace{SO(N)}_{\text{"spezielle orthogonale Trf."}} \subset O(N)$; R ist eine Drehung.

  2) $\det R = -1$ heißt $R = (\text{Drehung})\cdot(\text{Reflexion})$

  (z.B. Reflexion $= \mathrm{diag}(-1, 1, \cdots, 1) = \begin{pmatrix} -1 & & 0 \\ & 1 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$)

- Beachte: Für ungerade N (z.B. $N=3$) ist $\det(-\mathbb{1}) = -1$ und jedes $R \in O(N)$ kann als $R = (\text{Drehung}) \cdot (-\mathbb{1})$ geschrieben werden. [$(-\mathbb{1}) \equiv$ Reflexion am Ursprung.]
- einfachstes Beispiel: $R \in SO(2)$ ist stets von der Form $R = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \equiv$ "Drehung um φ in posit. Drehsinn".

3.3 Tensoren

- Vektoren $x \in V$ werden durch Komponenten x^i beschrieben. Diese transformieren sich gemäß $x^i \to R^{ij} x^j$.
- Tensoren n-ten Ranges $t \in \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{n\text{-mal}}$ werden durch Komponenten $t^{i_1 \cdots i_n}$ beschrieben. Diese transformieren sich gemäß $t^{i_1 \cdots i_n} \longrightarrow R^{i_1 j_1} \cdots R^{i_n j_n} t^{j_1 \cdots j_n}$.
- Beispiele für $n=2$:
  - $t^{ij} = x^i y^j$ (Dies ist eine neue Art zwei Vektoren zu multiplizieren; nicht zu verwechseln mit Skalar- oder Kreuzprodukt.)
  - $t^{ij} = \delta^{ij} = (\mathbb{1})^{ij}$ ("Kronecker-Delta")

    Dies ist ein sogenannter invarianter Tensor.

    (Er transformiert sich wie Tensor und bleibt doch gleich.)

$$\delta^{i_1 i_2} \longrightarrow R^{i_1 j_1} R^{i_2 j_2} \delta^{j_1 j_2} = R^{i_1 j_1} R^{i_2 j_1} = R^{i_1 j_1} (R^T)^{j_1 i_2}$$
$$= (RR^T)^{i_1 i_2} = (\mathbb{1})^{i_1 i_2} = \delta^{i_1 i_2}$$

- Wichtiges Beispiel mit $n=3$ und $N=3$:

(leicht verallgemeinerbar auf $n = N \neq 3$, aber das führt hier zu weit...)

ε^{ijk} ist auch ein invarianter Tensor unter $R \in SO(3)$

$$\varepsilon^{i_1 i_2 i_3} \longrightarrow \underbrace{R^{i_1 j_1} R^{i_2 j_2} R^{i_3 j_3} \varepsilon^{j_1 j_2 j_3}}$$

Dies ist offensichtlich total antisymm. in i_1, i_2, i_3. Jedes Zahlenschema mit dieser Eigenschaft ist zu $\varepsilon^{i_1 i_2 i_3}$ proportional.

$$\Rightarrow R^{i_1 j_1} R^{i_2 j_2} R^{i_3 j_3} \varepsilon^{j_1 j_2 j_3} = c \cdot \varepsilon^{i_1 i_2 i_3}$$

Betrachte speziell $i_1, i_2, i_3 = 1, 2, 3$

$$\Rightarrow \underbrace{R^{1 j_1} R^{2 j_2} R^{3 j_3} \varepsilon^{j_1 j_2 j_3}}_{\equiv \det R.} = c$$

Wegen $R \in SO(3)$ ist $c = \det R = 1$ und damit ε^{ijk} in der Tat invariant.

Wichtige Folge: $(\bar{a} \times \bar{b})^i = \varepsilon^{ijk} a^j b^k$ transformiert wie Vektor unter Drehungen, denn

$$\varepsilon^{ijk} a^j b^k \rightarrow \left(R^{ii'} R^{jj'} R^{kk'} \varepsilon^{i'j'k'}\right)\left(R^{jl} a^l\right)\left(R^{km} b^m\right)$$

$$= R^{ii'} \cdot \varepsilon^{i'j'k'} \left[(R^T)^{j'j} R^{jl} a^l\right] \left[(R^T)^{k'k} R^{km} b^m\right]$$

$$= R^{ii'} \varepsilon^{i'j'k'} a^{j'} b^{k'} = R^{ii'} (\bar{a} \times \bar{b})^{i'} \quad \checkmark$$

Achtung! Für $R \in O(3)$ gilt dies nicht mehr ($\Rightarrow$ "Pseudovektor")

3.4 Galilei-Transformationen

Bisher: euklidischer Raum $\mathbb{R}^3$ mit Symmetriegruppe $O(3)$,
jetzt: phys. Raum-Zeit und deren Symmetriegruppe.

- es kommt hinzu: Zeit t
  (statt vom Pkt. $\bar{x} \in \mathbb{R}^3$ reden wir jetzt vom Ereignis $(t, \bar{x}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$)
- es geht verloren: Die besondere Rolle von $\bar{0} \in \mathbb{R}^3$.
  ($|\bar{x}|$ und $|\bar{y}|$ sind unphysikalisch, nur der relative Abstand $|\bar{x}-\bar{y}|$ hat Realität. Ebenso sind nur Zeitdifferenzen $t_1 - t_2$ etc. physikalisch.)
- es geht verloren: Das Konzept von "Ruhe":
  $(t, \bar{0})$ mit $t \in \mathbb{R}$ beschreibe ein am Ursprung ($\bar{0}$) ruhendes Objekt. Diese Situation ist aber zu einer gleichförmigen Bewegung $(t, \bar{v} \cdot t)$ äquivalent.
  $\Rightarrow$ Die Unterscheidung von Zeit und Raum wird verwischt.

Aus all dem ergibt sich die Gruppe G der Galilei-Trf.-en als Symmetriegruppe der phys. Raum-Zeit $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ der klassischen Mechanik. Sie besteht aus

1) Rotationen: $(t, x) \longmapsto (t, Rx)$ mit $R \in O(3)$
(x ist 3-elementiger Spaltenvektor, Vektorpfeil unterdrückt.)

2) Translationen: $(t,x) \longmapsto (t+s,\, x+y)$ mit $s \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}^3$

3) Boosts: $(t,x) \longmapsto (t,\, x+vt)$ mit $v \in \mathbb{R}^3$

und beliebigen Hintereinanderausführungen davon.

Nichttrivialer Fakt: Jedes $g \in G$ ist schreibbar als

$$g = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Boost}}}{g_3} \circ \underset{\substack{\nwarrow \\ \text{Translation}}}{g_2} \circ \underset{\substack{\nwarrow \\ \text{Rotation}}}{g_1}$$

(Der Beweis beinhaltet u.a., daß z.B. $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Transl.}}}{g_2} \circ \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Rot.}}}{g_1} \circ \underset{\substack{\nwarrow \\ \text{Translat.}'}}{g_2'}$

geschrieben werden kann als

$$g_2 \circ g_1 \circ g_2' = g_2'' \cdot g_1''$$

(mit passend gewählter Translation g_2'' und Rotation g_1''. Mehr dazu in den Übungen.)

Kommentare:

- Rotationen wurden unverändert vom euklid. Raum $\mathbb{R}^3$ übernommen
- Translationen kamen mit "Abschaffung" der 0 hinzu.
- Galilei-Boosts "mischen" den $\mathbb{R}$ (Zeit) und $\mathbb{R}^3$ (Ort)-Teil des $\mathbb{R}^4$-Koordinatensystems: $(t,x) \mapsto (t,\, x+vt)$.
- Das führt zum Verlußt des Konzepts der "Gleichörtlichkeit":

$$\begin{array}{l} (t,x) \quad ; \quad (t',x) \quad - \text{ zwei Ereignisse am gleichen Ort} \\ \qquad\quad \Big\downarrow \text{ Boost} \\ (t,\, x+vt) \quad ; \quad (t',\, x+vt') - \text{i.A. nicht am gleichen Ort.} \end{array}$$

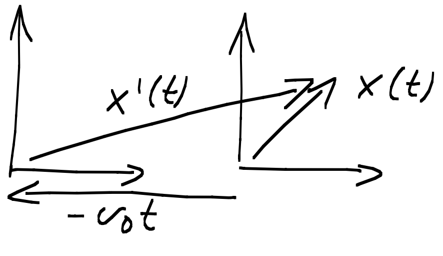
- eine analoge Mischung vom Typ $(t,x) \mapsto (t+\alpha\cdot x, x)$ ist nicht erlaubt, da sie die "Gleichzeitigkeit" relativieren würde. (Dies wird erst mit den Lorentz-Boosts der spez. Rel. theorie geschehen.)
- "Boost" heißt "Zunahme" (der Geschwindigkeit). Betrachte dazu die Trf. einer Trajektorie:

$$(t, x(t)) \longmapsto (t, x(t)+v_0 t)$$

$$v = \dot{x}(t) \qquad\qquad v = \dot{x}(t) + \underbrace{v_0}_{\text{extra Beitrag}}$$

Das wird auch als *aktive* Beschreibung einer Symmetrie bezeichnet. Technisch gleichwertig aber konzeptionell verschieden ist die *passive* Beschreibung, bei der man das phys. System (z.B. die obige Trajektorie $(t,x(t))$) unverändert läßt, aber aus einem anderen Koord. system (z.B. anderen Inertialsystem) beschreibt:

- Der Ursprung dieses zweiten Koord.systems bewege sich auf Trajektorie $(t,-v_0\cdot t)$, so daß die Koord.systeme bei $t=0$ identisch sind.
- Dann wird die Trajektorie $(t,x(t))$ im zweiten System durch $(t, x(t)-(-v_0 t)) = (t, \underbrace{x(t)+v_0 t}_{x'(t)})$ beschrieben.



3.5 Affiner Raum (fortgeschritten)

Bisher unbefriedigend: Galilei-Gruppe ist nicht die "natürliche" Symmetrie des $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ (dies wäre die $O(3)$, zumindest für den $\mathbb{R}^3$-Teil). Das "Ignorieren der $\bar{0} \in \mathbb{R}^3$" ist mathematisch unelegant.

Deshalb: Definiere "Affinen Raum":

Gegeben sei Menge A, Vektorraum V und eine Abb.

$$A \times A \longrightarrow V$$
$$(P, Q) \longmapsto \overrightarrow{PQ}$$, so daß

- $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$ || Intuitiv: Wir können in A nur Pfeile zwischen Punktepaaren, nicht aber die Punkte selbst addieren. ||
- zu jedem $P \in A$ & $\vec{v} \in V$ $\exists$ eindeutig ein $Q \in A$ für welches $\bar{v} = \overline{PQ}$ gilt.

|| Das Paar (A, V) heißt dann affiner Raum ||

Beispiel: Zu jedem Vektorraum V erhalten wir einen affinen Raum indem wir $A = V$ & $\left\{ \begin{array}{l} A \times A \to V \\ (\bar{x}, \bar{y}) \longmapsto \bar{y} - \bar{x} \end{array} \right\}$

setzen und uns auf obige Definition berufen.

Formalisierung der phys. Raum-Zeit und Galilei-Gruppe:

- Sei A^4 der (wie oben beschrieben) zu $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$ gehörige affine Raum.
- Bezeichne Elemente davon durch $(t,\bar{x})$ und definiere
  1) Zeitfunktion: $(t,x), (t',x') \longmapsto t-t'$
  2) Abstandsfkt. (nur für gleichzeitige Ereignisse):
  $$(t,x), (t,x') \longmapsto \|x-x'\|$$
  (Man nennt dies eine Galileische Struktur)
- A^4 mit Galileischer Struktur ist die phys. Raum-Zeit.
- Die <u>Galilei-Gruppe</u> sind die Transformationen des A^4, welche dessen Struktur als aff. Raum & die Galileische Struktur respektieren.

(In Analogie zu: $O(3)$ sind die Transformationen des $\mathbb{R}^3$, welche dessen Vektorraumstruktur und das Skalarprodukt respektieren.)

3.6 Invarianz der Dynamik

Bisher war unsere Diskussion rein beschreibend (kinematisch). Die entscheidende physikalische Aussage ist, daß die Dynamik der klass. Mechanik unter Galilei-Trf.-en invariant ist.

Betrachte Trajektorie: $(t, x(t))$

$$\Big\downarrow \text{Galilei-Trf.}$$

$$(t', x'(t')) = \big(t+s,\ Rx(t) + \underbrace{y + v\cdot(t+s)}_{\text{linear in } t \text{ bzw. in } t'}\big).$$

Berechne

$$m\frac{d^2x'}{dt'^2} = m\frac{d^2x'}{dt^2} = mR\frac{d^2x}{dt^2}.$$ Wir wollen: $m\frac{d^2x'}{dt'^2} = F'$.

Dies gilt genau dann wenn $m\frac{d^2x}{dt^2} = F$ und $F' = RF$.

$\Rightarrow$ Newtonsche Dynamik ist invariant unter Galilei-Trf.-en falls sich Kräfte unter Drehungen wie Vektoren transformieren.