6 Symmetrien & Erhaltungssätze

2 zentrale Aspekte von Symmetrien:

1) Symmetrieforderung $\longrightarrow$ Form der Wirkung
2) Wirkung hat gewisse Symmetrie $\longrightarrow$ Erhaltungsgröße

6.1 Symmetrie-Motivation der Lagrange-Fkt. der klass. Mechanik

- betrachte freien Massenpkt.
- $L = L(\bar{x}, \bar{v}, t) = L(\bar{v})$ da Raum & Zeit homogen
- $L(\bar{v}) = L(\bar{v}^2)$ da Raum isotrop
- betrachte Galilei-Boost $\bar{v} \to \bar{v}' = \bar{v} + \bar{\varepsilon}$

$$L(\bar{v}^2) \to L(\bar{v}'^2) = L(\bar{v}^2 + 2\bar{v}\cdot\bar{\varepsilon} + \bar{\varepsilon}^2)$$

$$= L(\bar{v}^2) + \underbrace{\frac{\partial L(\bar{v}^2)}{\partial(\bar{v}^2)}\cdot(2\bar{v}\cdot\bar{\varepsilon})}_{\text{muß totale Zeitableitung sein, damit Bew.gl.-en invariant bleiben}} + O(\varepsilon^2)$$

- Da $\bar{v} = \frac{d\bar{x}}{dt}$, ist letzteres

durch $\frac{\partial L(\bar{v}^2)}{\partial(\bar{v}^2)} = \text{const.}$ gewährleistet $\Rightarrow L = \underbrace{\frac{m}{2}}_{\text{Positivität von } m \text{ notwendig, damit } S \text{ Minimum hat.}} \bar{v}^2$

(Beachte: Eigentlich müßten wir die Möglichkeit einer totalen Zeitableitung auch bei der Diskussion der $\bar{x}, t$-Unabhängigkeit von L in Betracht ziehen. Dies führt aber schließendlich zu keinen neuen Möglichkeiten.)

- Mehrere Massenpkt.-e (ohne Wechselwirkung):

  $L = \sum_a \frac{m_a}{2} \vec{v}_a^{\,2}$ wegen Additivität von L.

- Hinzunahme von Wechselwirkungstermen der Form

  $-V_{ab}(|\vec{x}_a - \vec{x}_b|)$ respektiert offensichtlich Galilei-Invarianz.

- Das obige stellt keinen Beweis dar, daß $L = T - V$ die "richtige" Lagrange-Fkt. ist, sondern nur eine Motivation. Es wäre auch recht akademisch ($L = T - V$ ist experimentell <u>sehr</u> gut belegt), wenn nicht derartige Symmetrieargumente später (bei der Suche nach <u>neuer</u> Physik) zu den wichtigsten Methoden gehören würden.

<u>6.2 Energieerhaltung</u>

Homogenität der Zeit, Zeittranslationsinvarianz

$\Rightarrow$ L hängt nicht explizit von t ab: $L(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q})$.

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} L = \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \underset{\uparrow}{=} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i\right) \Rightarrow \frac{d}{dt}\Big(\underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L}_{\equiv E}\Big) = 0$$

Bleibt zu zeigen, daß diese Def. von E mit der üblichen übereinstimmt.

Dazu: $L = T - V = \underbrace{\frac{1}{2} f_{ij}(q)\, \dot{q}_i \dot{q}_j}_{} - V(q)$

Dies ist was typischerweise beim Übergang zu verallg. Koordinaten aus $\sum_a \frac{m_a}{2} \vec{v}_a^{\,2}$ wird.

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left(\frac{1}{2} f_{jk}\, \dot{q}_j \dot{q}_k \right) \dot{q}_i$$

$$= \frac{1}{2} f_{jk}\, \delta_{ij}\, \dot{q}_k \dot{q}_i + \frac{1}{2} f_{jk}\, \dot{q}_j\, \delta_{ik}\, \dot{q}_i = f_{ik}\, \dot{q}_i \dot{q}_k = 2T$$

$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L = 2T - (T - V) = T + V \quad \checkmark$$

6.3 Erhaltung des verallg. Impulses

Sei $L = L(q_1 \cdots q_s, \dot{q}_1 \cdots \dot{q}_s, t) = L(q_2 \cdots q_s, \dot{q}_1 \cdots \dot{q}_s, t)$. Dann heißt q_1 "zyklische Koordinate" und $q_1 \to q_1 + \varepsilon$ ist eine Symmetrie.

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} = 0 \quad \xRightarrow[\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial L}{\partial q_1} = 0]{} \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\right) = 0 \quad ; \quad p_1 \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}$$

ist der zu q_1 gehörige (erhaltene) verallg. Impuls.

Beispiele

① Man beschreibe die 1-dim. Bewegung von s Massenpunkten mit Koordinaten $x_1 \cdots x_s$ durch die verallg. Koordinaten

$q_1 = x_1$, $q_{12} \equiv x_2 - x_1$, $\cdots$, $q_{1s} = x_s - x_1$. Wechselwirkungen seien erlaubt.

$$\Rightarrow L = \frac{m_1}{2} \dot{q}_1^2 + \sum_{a=2}^{s} \frac{m_a}{2} (\dot{q}_1 + \dot{q}_{1a})^2 - V(q_{12}, \cdots, q_{1s})$$

$\Rightarrow q_1$ ist zyklisch,

$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot q_1} = m_1 \dot q_1 + \sum_{a=2}^{s} m_a (\dot q_1 + \dot q_{1a}) = P_{gesamt} \text{ ist erhalten.}$$

(Dies läßt sich natürlich sofort auf 3-dim. Bewegungen erweitern.)

② Freier Massenpkt. in Ebene: $L = \frac{m}{2}(\dot x^2 + \dot y^2) = \frac{m}{2}(r^2\dot\varphi^2 + \dot r^2)$.

φ zyklisch $\Rightarrow m r^2 \dot\varphi$ erhalten.

(Dies läßt sich auch zur (gewohnten) 3-dim. Drehimpulserhaltung eines Pkt.massensystems erweitern. Man kann auch direkt die Invarianz von L unter $\bar x_a \to \bar x_a' = R \bar x_a$ (für alle a gleichzeitig) fordern und $\bar L = \bar x_a \times \bar p_a = \text{const.}$ zeigen (vgl. Kapitel 7.3 von SS'05).

6.4 Noether Theorem

(Allg. Zush. zwischen Symmetrien & Erhaltungsgrößen)

- Sei die Wirkung invariant* unter folgender Transformation:

> *) Dies schließt Invarianz "bis auf Randterme" ein. Sprich: $\delta S = \int dt \frac{d}{dt}(\delta f)$ soll erlaubt sein.

$t \longrightarrow t'(t) = t + \delta t(t)$ (Man denke z.B. an die "Verschiebung in t", wie in 6.2 benutzt.)

$q(t) \longrightarrow q'(t') = q(t) + \delta q(t)$ [q steht symbolisch für $q_1 \dots q_s$]

[Das so definierte δq schließt den indirekten Effekt von δt mit ein. Man kann diesen auch abtrennen und schreiben:

$$q'(t) = q(t) + \bar{\delta}q(t).$$

Da $q'(t') \simeq q'(t) + \dot{q}'(t)\cdot\delta t \simeq q(t) + \underbrace{\bar{\delta}q(t) + \dot{q}(t)\delta t}_{\equiv\, \delta q(t)}$,

(q' durch q ersetzbar, da der Fehler höherer Ordnung ist)

kann stets von δq zu $\bar{\delta} q$ übergehen (und umgekehrt)]

- Unsere Definition von Invarianz bedeutet

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt}(\delta f) \quad \text{bzw.}$$

$$\underbrace{\int_{t_1'}^{t_2'} dt' L(q'(t'), \dot{q}'(t'), t')}_{①} - \int_{t_1}^{t_2} dt\, L(q(t), \dot{q}(t), t) = \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt}(\delta f)$$

- Wir betrachten zunächst nur den 1. Summanden auf der linken Seite:

$$
\begin{aligned}
① &= \int_{t_1'}^{t_2'} dt\, L(q'(t), \dot{q}'(t), t) \\
&= \int_{t_1'}^{t_1} dt\, L(\cdots, t) + \int_{t_1}^{t_2} dt\, L(\cdots, t) + \int_{t_2}^{t_2'} dt\, L(\cdots, t) \\
&\simeq L(\cdots, t_1)\Big(\int_{t_1'}^{t_1} dt\Big) + \int_{t_1}^{t_2} dt\, L(\cdots, t) + L(\cdots, t_2)\Big(\int_{t_2}^{t_2'} dt\Big) \\
&\simeq L(\cdots, t_1)\big(-\delta t(t_1)\big) + \int_{t_1}^{t_2} dt\, L(\cdots, t) + L(\cdots, t_2)\,\delta t(t_2) \\
&= \int_{t_1}^{t_2} dt \Big[\frac{d}{dt}\Big(L(q(t), \dot{q}(t), t)\,\delta t(t)\Big) + L(q'(t), \dot{q}'(t), t)\Big]
\end{aligned}
$$

(Hier konnte q' durch q ersetzt werden, da der Fehler höherer Ordnung ist.)

- Insgesamt folgt daraus:

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{d}{dt}(L\,\delta t) + \underbrace{L(q'(t),\dot q'(t),t) - L(q(t),\dot q(t),t)}_{\frac{\partial L}{\partial q}\bar\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot q}\bar\delta \dot q} - \frac{d}{dt}(\delta f)\right] = 0$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q}\right)\bar\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot q}\frac{d}{dt}(\bar\delta q) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q}\bar\delta q\right)$$

$\Rightarrow$ totale Zeitableitung unter Integral, also

$$\left(L\,\delta t + \frac{\partial L}{\partial \dot q}\bar\delta q - \delta f\right)\Big|_{t_1}^{t_2} = 0,$$

oder:

$$\left\| \frac{d}{dt}\underbrace{\left(L\,\delta t + \frac{\partial L}{\partial \dot q}\bar\delta q - \delta f\right)}_{\text{Dies ist die gesuchte Erhaltungsgröße!}} = 0 \right\|$$

6.5 Eine anwendungsorientierte Formulierung des Noether-Theorems und einige Beispiele

- Explizitmachen der Kleinheit von δt, δq:

$$\delta t(t) = \varepsilon \cdot T(t)$$
$$\delta q_i(t) = \varepsilon \cdot Q_i(t)$$

mit ϵ – infinitesimaler Transf.parameter

und T, Q_i – gewisse fest gewählte Funktionen

$$\boxed{\text{außerdem gegebenenfalls } \delta f = \epsilon\, F}$$

- Wir wissen: $\bar\delta q_i = \delta q_i - \dot q_i \delta t = \epsilon\,(Q_i(t) - \dot q_i(t)\cdot T(t))$

- Erhaltungsgröße laut 6.4:

$$L\,\delta t + \frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\,\bar\delta q_i - \delta f \;=\; \epsilon \cdot \underbrace{\left[\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\left(Q_i(t) - \dot q_i T(t)\right) + L \cdot T(t) - F(t)\right]}$$

Summe $i = 1 \cdots s$!

Dies ist die versprochene anwendungsbereite Form der Erhaltungsgröße.

Beispiele:

① Zeittranslationsinvarianz:

$$\begin{array}{lcl} t \to t' = t + \epsilon & \Rightarrow & \delta t = \epsilon \\ q_i(t) \to q_i'(t') = q_i(t) & & \delta q_i = 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} T = 1 \\ Q_i = 0 \end{array}$$

(L ist dann invar., falls es nicht explizit von t abhängt $\Rightarrow \delta f = F = 0$.)

Erhaltungsgröße: $\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}(Q - \dot q_i T) + LT - F = -\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\dot q_i + L = -E$ ✓

② Translation in q_1 ("zyklische Koordinate")

$$\begin{array}{lcl} t \to t' = t & \Rightarrow & \delta t = 0 \\ q_1 \to q_1' = q_1 + \epsilon & & \delta q_1 = \epsilon \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} T = 0 \\ Q_1 = 1 \quad (Q_i = 0 \text{ sonst}) \end{array}$$

Erhaltungsgröße: $\frac{\partial L}{\partial \dot q_1} = p_1$ wie oben.

Nochmals Formulierung als "Theorem":

|| Jeder kontinuierlichen Symmetrie der Wirkung entspricht eine Erhaltungsgröße. ||

<u>Speziell:</u> Zeittranslationen $\longrightarrow$ Energie
Translationen $\longrightarrow$ Impuls
Rotationen $\longrightarrow$ Drehimpuls
Boosts $\longrightarrow$ $\bar{x}_s - \bar{v}_s t$ (geradlinig gleichf. Bewegung d. Schwerpkt.es)

$\underbrace{\qquad\qquad}_{\text{Galilei-Gruppe}}$

($\rightarrow$ S. 133 des Skriptums SS '05)

<u>Achtung!</u> Das Noether-Theorem wird in ED & QFT von noch viel größerer Bedeutung sein.
(Speziell wird sich dort das gute Verständnis nichttrivialer δt's lohnen, was hier etwas banal wirkt, da die Galilei-Gruppe nur δt = const. zuläßt.)

6.6 Homogene Fkt.-en und der Satz von Euler

Eine Fkt. f von n Variablen heißt homogen vom Grad k falls

$$f(\alpha x_1, \dots, \alpha x_n) = \alpha^k f(x_1, \dots, x_n)$$

<u>Beispiele:</u>

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= x^2 \\ f(x,y) &= (x+y)^2 + y^2 + 3xy \end{aligned}\right\} k = 2$$

$$\left. f(x,y,z) = \frac{x}{y \cdot z} \right\} k = -1$$

$$\left. T = \frac{1}{2} f_{ij}(q)\,\dot{q}_i \dot{q}_j \right\} k = 2 \text{ (aber nur bezüglich } \dot{q}_1 \dots \dot{q}_s)$$

<u>Satz v. Euler:</u>

f homogen vom Grad k $\Rightarrow$ $\dfrac{\partial f}{\partial x_i} \cdot x_i = k \cdot f$

<u>Begründung:</u>
$$f(\alpha x_1, \dots, \alpha x_n) = \alpha^k f(x_1 \dots x_n)$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{\partial}{\partial \alpha} f(\alpha x_1, \dots, \alpha x_n) = \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\alpha^k f(x_1 \dots x_n)\right)$$
$$\frac{\partial}{\partial(\alpha x_i)} f(\alpha x_1, \dots, \alpha x_n) \cdot x_i = k \cdot \alpha^{k-1} f(x_1 \dots x_n)$$

Für $\alpha = 1$ folgt die Behauptung.

<u>Anwendung:</u> $\frac{\partial L}{\partial \dot q_i} \cdot \dot q_i = \frac{\partial T}{\partial \dot q_i} \dot q_i = 2T$ (vgl. Herleitung der Energieerhaltung in 6.1)

6.7 Mechanische Ähnlichkeit

- Betrachte System von Massenpunkten mit
$$L = T - V = \sum_a \frac{m_a}{2} \dot{\bar x}_a^2 - V(\bar x_1, \dots, \bar x_N).$$
- Sei V homogen vom Grad k. Sei $t \to \bar x_a(t)$ eine phys. Bewegung des Systems (d.h. dieser Satz von Fkt.-en erfülle die Lagr.-Gl.-en).
- Zur Notationsvereinfachung $\bar x_1 \dots \bar x_N \to x$; wir betrachten also eine phys. Bewegung $\underline{t \to x(t)}$
- Nach einer Transformation $x \to \alpha x$; $t \to \beta t$ haben wir eine Bewegung, die durch $\beta t \to \alpha x(t)$ beschrieben wird, bzw. durch $\underline{t \to \alpha x(t/\beta)}$ (was dasselbe ist).
- Für den Übergang von der <u>alten</u> zur <u>neuen</u> Bewegung gilt offensichtlich
$$T \to \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 T \; ; \; V \to \alpha^k V.$$

- Falls $\underline{\underline{\alpha^k = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2}}$, folgt $L \to \alpha^k L$. Das impliziert, daß die neue Bewegung wieder eine phys. Bewegung ist (sie erfüllt wieder die Lagr.-Gl.-en, da diese homogen in L sind). Wir haben es also in diesem Fall mit mechanischer Ähnlichkeit zu tun.

Anwendung:
- Seien X, T "typische" Länge & Zeit einer Bewegung. (z.B. Umkehrpunkt, Bahnradius, Periode, etc.)
- Seien $X' = \alpha X$, $T' = \beta T$ typische Länge & Zeit einer ähnlichen Bewegung (desselben Systems).

Es folgt: $\frac{T'}{T} = \beta \underset{\uparrow}{=} \alpha^{1-k/2} = \left(\frac{X'}{X}\right)^{1-k/2}$

wegen $\alpha^k = (\alpha/\beta)^2$

Also: $\boxed{\frac{T'}{T} = \left(\frac{X'}{X}\right)^{1-k/2}}$ Nützliche Beziehung!

Beispiele:

(1) Harmonischer Oszillator: $V \sim x^2$, $k = 2 \Rightarrow \frac{T'}{T} = 1$
("Periode unabhängig von Stärke der Auslenkung.")

(2) Freier Fall: $V \sim x$, $k = 1 \Rightarrow \frac{T'}{T} = \sqrt{\frac{X'}{X}}$
("Quadrate der Fallzeiten verhalten sich wie Fallhöhen.")

③ Gravitation: $V \sim \frac{1}{x}$, $k=-1$ $\Rightarrow$ $\frac{T'}{T} = \left(\frac{x'}{x}\right)^{3/2}$

"Quadrate der Umlaufzeiten verhalten sich wie Kuben der Abstände (3. Keplersches Gesetz)."

Eine Übertragung auf andere Größen ist leicht möglich, z.B

$$\frac{v'}{v} = \frac{(x'/T')}{(x/T)} = \frac{(x'/x)}{(T'/T)} = \frac{(x'/x)}{(x'/x)^{1-k/2}} = \left(\frac{x'}{x}\right)^{k/2}$$

etc.

6.8 Virialsatz

- Betrachte zeitgemittelte Größen: $\bar{A} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t dt' A(t')$

(offensichtlich besonders einfach auszuwerten, falls $A(t)$ eine totale Zeitableitung ist.)

- Umschreiben von $T = \frac{m}{2}v^2$ auf eine totale Zeitableitung:

$$2T = mv^2 = p\dot{x} = \frac{d}{dt}(px) - \dot{p}x = \frac{d}{dt}(px) + x\frac{\partial V}{\partial x}$$

oder $$2T - x\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{d}{dt}(px)$$

$$\overline{2T - x\frac{\partial V}{\partial x}} = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t dt' \frac{d}{dt'}(px)$$

$$= \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\left[(px)|_t - (px)|_0\right] \underset{\text{falls } p \,\&\, x \text{ beschränkt}}{=} 0$$

$\Rightarrow$ Für Bewegungen in einem beschränkten Gebiet mit beschränkten Geschwindigkeiten gilt $2\bar{T} = \underbrace{\overline{\sum_a x_a \frac{\partial V}{\partial x_a}}}_{\text{"Virial"}}$.

Falls V homogen vom Grad k, folgt $2\bar{T} = k\bar{V}$.

Also z.B.
- harmon. Oszillator: $\bar{T} = \bar{V}$
- Gravitation: $2\bar{T} = -\bar{V}$

(Letzteres ist z.B. relevant für die Langzeitbeschreibung der Bewegung von Sternen in einer Galaxie, wo man einen Zshg. zwischen mittlerer Geschwindigkeit und Galaxiengröße ableiten kann.)