Erinnerung

Historie + Phänomene

Newton

1. Lösung durch D.G.
2. Ellipse
3. 3. Kepler
4. Einschub: Periheldrehung.
5. 2. Lösg durch $\int$
6. $\psi(t)$ [illegible]
7. Bewegung im Inertialsystem
8. Ebbe + Flut

9) mögl. Bahnkurven

10) Discussion der Hyperbel
Stoss $\measuredangle$.

I Erinnerung.

Massenpunkt m im Zentralpotential $V(r)$

$\rightarrow$ 1 dim Problem wg. Drehimpulserhaltung.

1. Gehe in Ebene $\perp$ zu $\vec{L} = [\vec{r} \times \vec{p}]$

Führe dort Polarkd. ein r, φ

Drehimpulserhaltung: $mr^2\dot{\varphi} = L$

$$\leadsto \quad E = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + U_{eff}(r)$$

$$U_{eff} = V(r) + \frac{L^2}{2mr^2}$$

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\dot{r}^2 - U_{eff}(r)$$

Aus Energieerhaltung

Dynam. $$t = \int_{r(t_0)} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U_{eff})}} \rightarrow t(r) \downarrow r(t)$$

geometr. $$\varphi = \int \frac{\frac{L}{mr^2}\, dr}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U_{eff})}} \rightarrow \varphi(r) \downarrow r(\varphi)$$

Keplerproblem

1) Hist Kepler hatte das Problem gelöst.

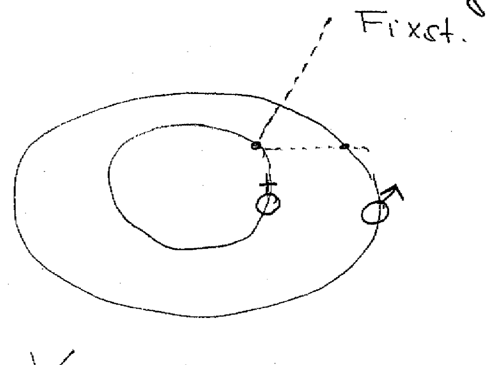
Er fand:

1) Planeten bew. sich auf Ellipsenbahnen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht

2) Flächengesetz: Fahrstrahl von Sonne zum Planeten überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen

3) T^2/a^3 = konst f. alle Planeten.

Hist. Eminent schwierige Interpret. der Beobachtungsdaten:



2 unbekannte Bahnkurven, nur ∡ Mess.

Konkurrierende Theorie

Kopernikus: Exzentrische Kreise (sehr ähnlich Ellipsen)

Motiv für Kepler: Sonne nahm im Kopernikanischen System keine ausgezeichnete Rolle ein.

Galilei kritisierte die Keplerschen Ellipsen, Kreis ist die vollkommene Bahnkurve (Abneigung gegen Manierismus?).

Keplerproblem von Newton gelöst.

2. Ges. gefolgt aus Zentralkraft.

3. Ges. Für Kreise aus Zentrifugal = Zentripetal

$$F_z = \frac{m}{2} \frac{v^2}{R} = \frac{m}{2} \frac{(2\pi)^2 R^{\cancel{2}}}{T^2 \cancel{R}} \; ; \; \text{Kepler 3} \to T^2 \sim R^3 \to F_z \sim \frac{1}{R^2}$$

2. Lösung Newton:

$$V(r) = -\frac{m_1 \cdot m_2 \cdot G_N}{r}$$

$\to$ 1, 2, 3. $\qquad G_N = 6.6 \cdot 10^{-11}\, m^3 kg^{-1} sec^{-2}$

a) DG. Viele Möglichkeiten der Lösung.

Nach meiner Meinung die eleganteste:

$$m\ddot{r} = -\frac{\partial U_{eff}}{\partial r} = \frac{-m_1 m_2 \cdot G_N}{r^2} + \frac{L^2}{m r^3}$$

m = red. Masse!

weil es nichts kostet, lassen wir eine zusätzliche Kraft $-m \cdot \eta \frac{1}{r^3}$ zu

Abkürzungen:

$$m_1 \cdot m_2 \cdot G_N / m = \kappa$$

$$\frac{L}{m} = \ell \qquad \ell = r^2 \cdot \dot{\varphi}$$

$$\ddot{r} = -\frac{\kappa}{r^2} + (\ell^2 - \eta)\frac{1}{r^3} \qquad \ell^2 - \eta \equiv \ell'^2$$

1. Schritt. $\quad t \to \varphi$

$$\dot{r} = \partial_\varphi \cdot r \cdot \dot{\varphi} = \frac{\ell}{r^2}\partial_\varphi r = -\ell\left(\partial_\varphi \frac{1}{r}\right)$$

$$\ddot{r} = -\frac{\ell^2}{r^2}\left(\partial_\varphi^2 \frac{1}{r}\right) \qquad \frac{1}{r} \equiv u$$

$$-\ell^2 u^2 \partial_\varphi^2 u = -\kappa u^2 + \ell'^2 u^3$$

$$\partial_\varphi^2 u = -\frac{\ell'^2}{\ell^2} u + \frac{\kappa}{\ell^2}$$

harmon. Osz. im konst Feld.

$$y = u - \frac{\kappa}{\ell'^2}$$

$$\partial_\varphi^2 y = -\frac{\ell'^2}{\ell^2} y$$

$$y = A \cdot \cos\left(\frac{\ell'^2}{\ell^2}\varphi - \varphi_0\right) = \frac{1}{r} - \frac{\kappa}{\ell'^2}$$

M

$$\boxed{r = \frac{\ell'^2/\kappa}{1 + \frac{\ell'^2}{\kappa} \cdot A \cdot \cos\left(\frac{\ell'^2}{\ell^2}\varphi - \varphi_0\right)}}$$

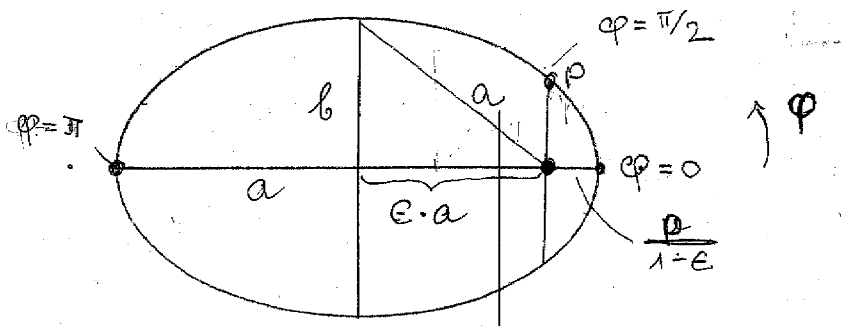
Wir setzen nun $\eta = 0$ d.h. $\ell^2 = \ell'^2$

führen ein $p = \ell^2/\kappa$

$$\epsilon = \frac{\ell^2}{\kappa} \cdot A \quad ; \quad \varphi_0 = 0$$

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 + \epsilon \cdot \cos\varphi}$$

Fokaldarstellung einer Ellipse



$\epsilon_{☿} = 0.2$

$\epsilon_{♀} = 0.007$

$\epsilon_{♁} = 0.017$

$\epsilon_{♂} = 0.09$

$\epsilon_{♃} = 0.05$

⋮

$\epsilon_{♇} = 0.25$

$$2a = \frac{p}{1+\epsilon} + \frac{p}{1-\epsilon} = \frac{2p}{1-\epsilon^2}$$

$$a^2 - b^2 = \epsilon^2 a^2 \quad \text{Ellipsenbed.}$$

$$a = \frac{p}{1-\epsilon^2} \qquad b = \frac{p}{\sqrt{1-\epsilon^2}}$$

Mars: $b/a = 0.996$

---

3. Kepler — Umlaufszeit

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\ell}{r^2} \qquad dt = \frac{r^2}{\ell} \cdot d\varphi$$

$dF = \frac{1}{2} r^2 d\varphi$

Periode: $$T = \frac{1}{\ell}\int_0^{2\pi} r^2 d\varphi = \frac{1}{\ell}\int 2\,dF = \frac{2F}{\ell}$$

Ellipse: Fläche $= \pi \cdot a \cdot b$

$$\Rightarrow T = 2\pi \frac{p^2}{(1-\epsilon^2)^{3/2}} \frac{1}{\ell} = 2\pi\, a^{3/2} p^{1/2} \frac{1}{\ell}$$

$$= 2\pi\, a^{3/2} \frac{\ell}{\sqrt{\kappa} \cdot \ell}$$

$$T^2/a^3 = \frac{(2\pi)^2}{\kappa}$$

$$K = \frac{m_p \cdot m_\odot \; G_N}{\frac{m_p \cdot m_\odot}{m_p + m_\odot}} = (m_p + m_\odot) \cdot G_N$$

d.h. K nicht streng universell; doch in unserem Planetensystem:

$m_\odot = 1$ ges.

$m_{♂} = 3.23 \cdot 10^{-7}$

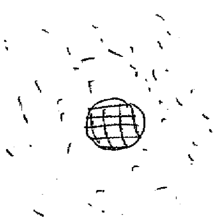
$m_{♃} = 9.5 \cdot 10^{-4}$

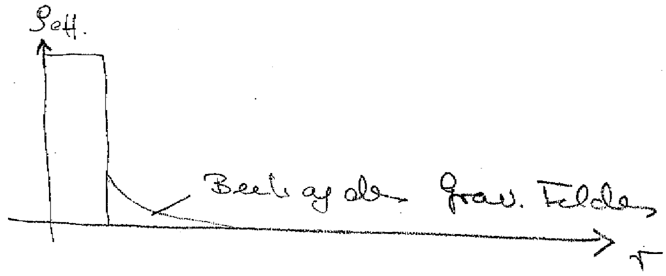
aber bei Doppelsternen wichtig!

Einschub **Einschub** Periheldrehung.

Allg. Rel.th.

Nicht nur die Masse, sondern auch das Gravitationsf. selbst trägt zur Gravitation bei $\sim |\vec{F}|^2$





Gravitationsfeld $\sim \frac{1}{r^2}$, $\rho \sim \frac{1}{r^4}$

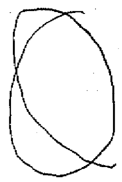
$$\sim U_{\vec{F}}(r) \doteq \frac{1}{r} \int_{R_0}^{r} \frac{1}{r^4} \, r^2 \, dr \sim \frac{1}{r^2}$$

d.h. Zusatzkraft $- m \eta \frac{1}{r^3}$

d.h. nach ART $\ell' \neq \ell$ und zwar $\ell' < \ell$

Nach Formel (H) mit $\varphi_0 = 0$

1. Perihel bei $\varphi = 0$
2. Perihel bei $\varphi = \frac{\ell^2}{\ell'^2} 2\pi$



Präzession des Perihels.

$$\frac{\ell^2}{\ell'^2} = \frac{\ell^2}{\ell^2 - \eta^2} \sim 1 + \frac{\eta^2}{\ell^2}$$

Präzession um so größer je kleiner ℓ.

Abschätzung $\dot\varphi \sim \frac{2\pi a}{T}$ $\quad \ell^2 = \frac{a^2 4\pi^2 a^2}{T^2}$

$T^2 \sim a^3$ $\quad \ell^2 \sim \cancel{a}\, a^3$ d.h. Effekt um so stärker, je kleiner a. Daher bei Merkur beob.

1. Exp. Bestätigung der ART

Ende Einschub.

	Th.	Exp
☿	43.03"/Jh	43.11
♀	8.6"/Jh	8.4
♁	3.8"/Jh	5.9

Minimal gegen sonst. Einflüsse

Integral

2. Art der Herleitg.

Gehe aus vom Energiesatz

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2E}{m} + \frac{2 m_1 m_2 \cdot \gamma}{m r} - \frac{\ell^2}{r^2}}$$

$$dt = \int \frac{dr}{\sqrt{\;}} \rightarrow d\varphi = \int \frac{dr}{\sqrt{\;}}$$

$$\varphi = \int \frac{du}{\sqrt{\frac{2E}{m\ell^2} + \frac{2k}{\ell^2} u - u}}$$

Integraltafel (s. Anlage)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a + bx - x^2}} = \arccos \frac{-b + 2u}{\sqrt{b^2 + 4a}}$$

eingesetzt ergibt

$$\varphi = -\arccos \frac{\frac{\ell^2 u}{k} - 1}{\sqrt{1 + \frac{2E\ell^2}{mk^2}}}$$

aufgelöst nach u →

$$r = \frac{\frac{\ell^2}{k}}{1 + \sqrt{1 + \frac{2E\ell^2}{mk^2}} \cos\varphi}$$

d.h. ϵ direkt aus E und ℓ

$$\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2E\ell^2}{mk^2}}$$

$*$ Bew. durch Nachrechnen

$$x = \cos(\arccos x) \qquad \text{diff } \partial_x$$

$$1 = \sin(\arccos x) \cdot \partial_x \arccos x$$

$$\partial_x \arccos x = \frac{1}{\sin(\arccos x)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\cos^2(\arccos x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{a+bx-x^2}} \longrightarrow \frac{}{\sqrt{-b^2/4 + bx - x^2 + a + \frac{b^2}{4}}}$$

$$= \frac{1^x}{\sqrt{\left(a+\frac{b^2}{4}\right) - \left(\cancel{x} - b/2\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\left(a+b^2/4\right)}\sqrt{\left(1-\left(\frac{(x-b/2)}{\sqrt{a+b^2/4}}\right)^2\right)}}$$

$$y = \frac{x-b/2}{\sqrt{a+b^2/4}} \qquad dx = dy \cdot \sqrt{a+b^2/4}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{}} = \int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$$

Letzte Stunde

$$V(r) = -\frac{mK}{r}\left(-\frac{m\eta}{2r^2}\right)$$

→ entweder durch Lösg. der DG oder durch Integration

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 + \epsilon \cos\left(\frac{\ell'^2}{\ell^2}\varphi\right)}$$

DG: $p = \ell^2/\kappa$ $\quad \epsilon = \frac{\ell^2}{\kappa}\cdot A$

$\int$: $p = \ell^2/\kappa$ $\quad \epsilon = \sqrt{1 + \frac{2E\ell^2}{m\kappa^2}}$

$\ell = |\vec{L}|/m$; $\quad E = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + U_{eff}(r)$

$m = m_1 \cdot m_2/(m_1 + m_2)$

Newton $\quad \kappa = \frac{m_1 \cdot m_2 G_N}{m} = G_N(m_1 + m_2)$; $\frac{\ell'^2}{\ell^2} = 1$

post-Newton $\quad \eta > 0$, aber klein $(\sim G_N^2)$

Im folgenden: $\eta = 0$ betrachtet.

$r(\varphi)$ Fokaldarstellg der Kegelschnitte

$\epsilon = 0$	Kreis	
$0 \leq \epsilon < 1$	Ellipse	später
$\epsilon = 1$	Parabel	
$\epsilon > 1$	Hyperbel	

Dynamische Kurve, d.h. letztlich $r(t)$.

$$\dot\varphi = \frac{\ell}{r^2} \qquad \frac{dt}{d\varphi} = \frac{1}{\ell} r^2 = \frac{\ell^4}{\ell k^2 (1+\epsilon\cos\varphi)^2}$$

$$\text{d.h. } t = \frac{\ell^3}{k}\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi'}{(1+\epsilon\cos\varphi')^2} = 2\arctan\frac{(1-\epsilon)\tan\varphi/2}{\sqrt{1-\epsilon^2}}$$

$$- \frac{\epsilon\sin\varphi}{(1-\epsilon^2)}$$ nicht ausschreiben

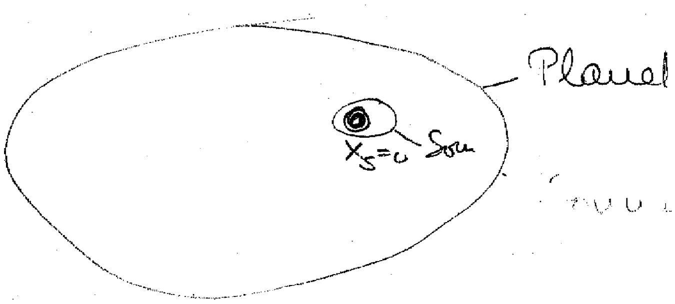
daraus $\varphi(t)$ und $r(\varphi(t))$.

Bahnkurven im Inertialsystem. (Wh.)

$$\vec X = \vec X_1 - \vec X_2 \qquad \vec X_S = \frac{m_1 X_1 + m_2 X_2}{(m_1+m_2)}$$

aufgelöst
$$X_1 = \frac{m_2}{M}\vec X + \vec X_S$$
$$X_2 = -\frac{m_1}{M}\vec X + \vec X_S$$

D.h. "Planet" (m_1) und "Sonne" bewegen sich um gemeinsamen Schwerpunkt.



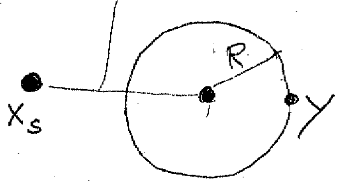
Wichtig für Gezeiten.

Gezeiten

Erde - Mond system

$m_1 = m_♁ \; ; \; m_2 = m_☾ \qquad m_2/m_1 \sim 1/81 \qquad T \sim 28\,d.$

$r_♁ - r_☾ = a \qquad \frac{m_2}{M}\cdot a \qquad R_♁ \sim 6.4\cdot 10^6\,m \qquad M = m_1 + m_2 \sim m_♁$



(übertrieben)

Erde Ellipse um Schwerpunkt

Vereinfachg: Kreisbahn

Dann gilt $\ddot{r} = 0 \rightsquigarrow \partial_r U_{eff}(0) \qquad m = \frac{m_1 m_2}{M}$

$$+\frac{m_1 m_2 G_N}{a^2} - \frac{\cancel{2} L^2}{\cancel{2} m a^3} = 0$$

$$\frac{m_1 m_2 G_N}{a^2} = \frac{m^2 a^4 \dot{\varphi}^2}{m a^3} \Rightarrow m a \dot{\varphi}^2 .$$

$$\frac{M G_N}{a^3} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \quad \text{(Kepler 3 für Kreis)}$$

Körper der Masse μ, der mit der Erde bewegt wird, am mondfernen Pkt. y

$$F_\mu = -\frac{\mu \cdot m_2 G_N}{(a+R)^2} + \mu\left(\frac{m_2}{M} a + R\right)\dot{\varphi}^2$$

$$\frac{1}{(a+R)^2} = \frac{1}{a^2\left(1+\frac{R}{a}\right)^2} = \frac{1}{a^2}\left(1+\frac{R}{a}\right)^{-2} = \frac{1}{a^2}\left(1 - 2\frac{R}{a} + \dots\right)$$

$$-\underline{\frac{\mu m_2 G_N}{a^2}} + \frac{\mu m_2 G_N R 2}{a^3} + \underline{\mu \frac{m_2}{M} a \dot{\varphi}^2} + \mu R \dot{\varphi}^2$$

$$+ \frac{\mu m_2}{M}\left(-\frac{M G_N}{a^2} + a\dot{\varphi}^2\right) + \underbrace{\frac{2\mu m_2 G_N R}{a^3}}_{k_3} + \frac{\mu \cancel{m_2}}{\cancel{M}} R\dot{\varphi}^2$$

$$F_\mu = \frac{2\mu m_2}{M} R\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 + \frac{\mu \cancel{m_2}}{\cancel{M}} R\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$$

$$F_\mu = \mu \cdot \frac{m_2}{M} \cdot R\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$$

$$= \mu \cdot \cancel{11} 4 \cdot 10^{-\cancel{4}} m s^{-2}$$

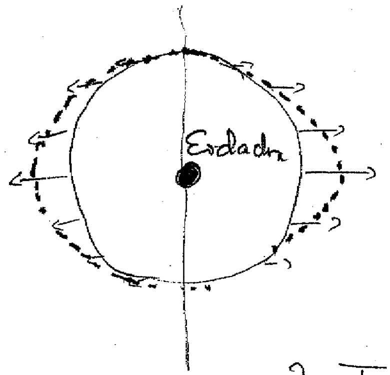
$\frac{1.6}{3} \cdot 81$
$1.6 \cdot 27$
27

Dazu kommt Schwerkraft

$$F_G = \mu \cdot g = \mu \cdot 9.81 \, m s^{-2}$$

d.h. Wirkung des Mondes sehr klein.

macht sich dennoch bemerkbar, bei Gezeiten



Vertikalkomp. vernachl. klein

Aber Horizontalkomp. bewirkt Verschiebg des H_2O

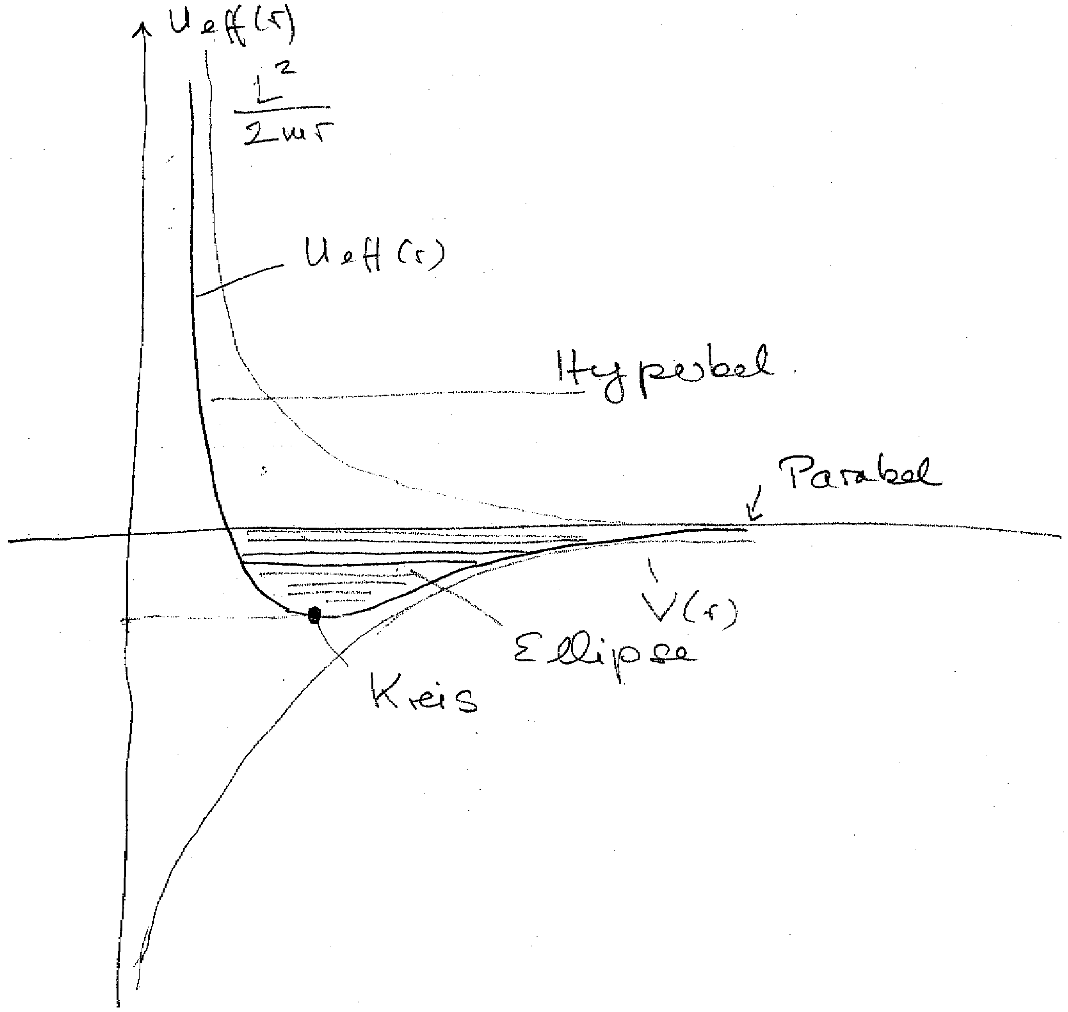
2 Flutberge, die zum Mond und vom Mond weg zeigen

Darunter dreht sich die Erde → Ebbe + Flut.

Spring+ Nippflut.

Gezeitenkräfte bei LEP: führen zu Verformg der Speicherrings, daher scheinb. Abh. der m_{Z_0} vom Mondstand!

Deutlich sichtbar im effekt. Pot.



Bahnparameter und dynamische Größen

$$\epsilon^2 = 1 + \frac{2El^2}{m\kappa^2}$$

Ellipse:

$$a = \frac{p}{1-\epsilon^2} = \frac{-l^2}{\kappa\left(\frac{2El^2}{m\kappa^2}\right)} = -\frac{m\kappa}{2E}$$

$$E = \frac{-m\kappa}{2a}$$ d.h. nur abh. von große HA.

gleiche Energie
(Bohr Sommerfeld)

$$l^2 = \frac{m\kappa^2(\epsilon^2-1)}{2E} = \kappa a(\epsilon^2-1)$$

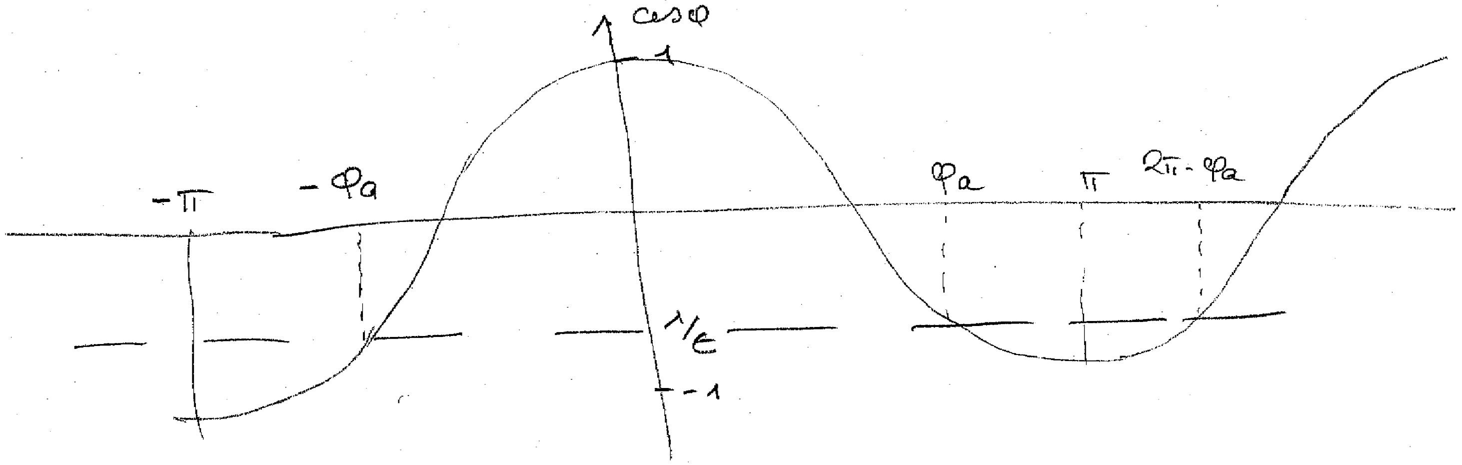
Benutze Kepler$_3$ $\quad T^2/a^3 = \frac{4\pi^2}{\kappa}$ $\quad$ mit $\cancel{\kappa}$

$$l^2 = (1-\epsilon^2)\,\frac{2\pi a^4}{T} \qquad (\text{Kreis } \epsilon = 0 \ \checkmark)$$

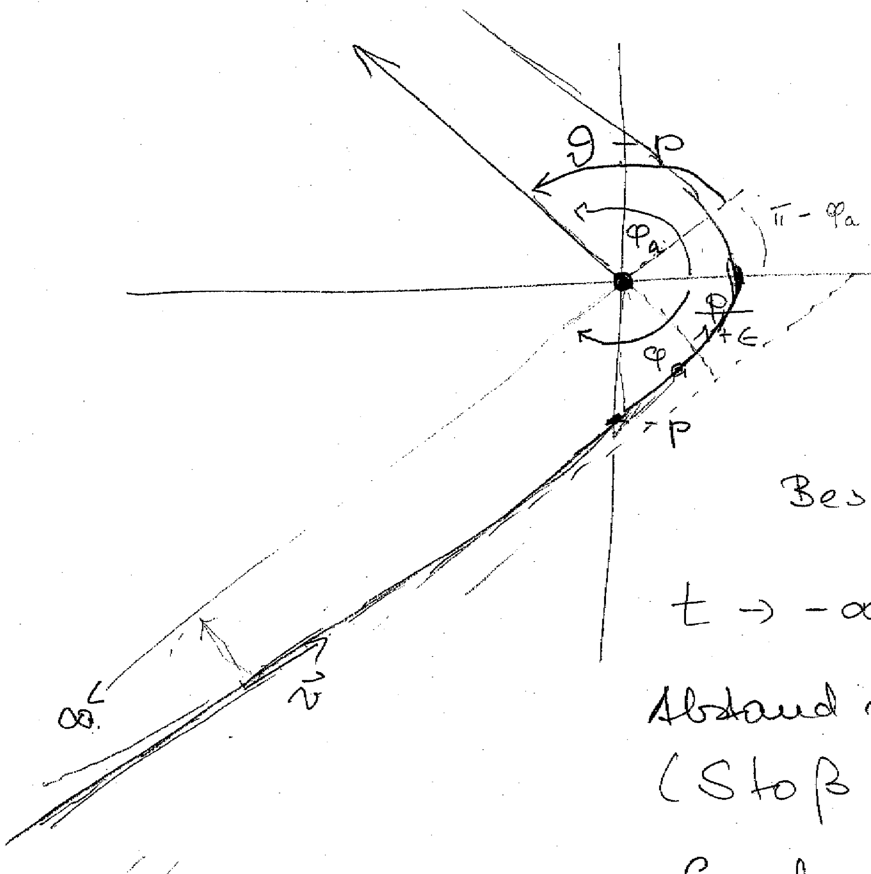
Discussion der Hyperbel

Hyperbel

$\epsilon > 1$



$p > 0$ (immer bei Gravitation) $\quad \cos\varphi_a = -\frac{1}{\epsilon}$



ϑ Ablenkungswinkel

$\vartheta = 2\varphi_a - \pi$

$\epsilon = 1 \quad \varphi_a = \pi \quad \vartheta = \pi$

$\epsilon = 0 \quad \varphi_a = \pi/2 \quad \vartheta = 0$

Bestimmung der von ϵ und p

$t \to -\infty$; Planet auf asymptote

Abstand von ~~Zentralkörper~~ Asymptote zu b

(Stoßparameter)

Geschwindig. v_∞

$U_{eff} \to 0 \quad \Rightarrow \quad E = \frac{m}{2} v_\infty^2$

$$\ell = \frac{1}{m}[\vec{r} \times \vec{p}] = [\vec{r} \times \vec{v}] = v \cdot r_\perp = v \cdot b$$

$$p = \frac{\ell^2}{\kappa} = \frac{v^2 b^2}{\kappa}; \quad \epsilon = \sqrt{1 + \frac{v^4 b^2}{\kappa^2}}$$

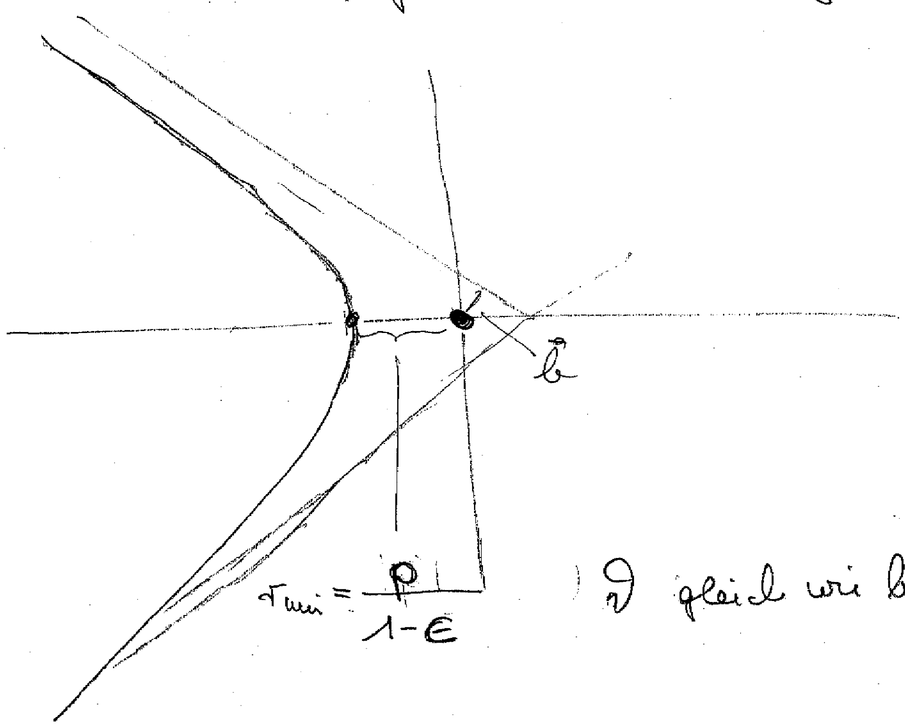
$$\sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{v^4 b^2}{\kappa^2}}} \qquad r_{min} = \frac{\ell^2}{\kappa\left(1+\sqrt{1+\frac{v^4 b^2}{\kappa^2}}\right)}$$

$$\kappa = \frac{m_1 \cdot m_2 \cdot G_N (m_1+m_2)}{m_1 \cdot m_2}$$ bei Gravitation.

bei Elektrostatik

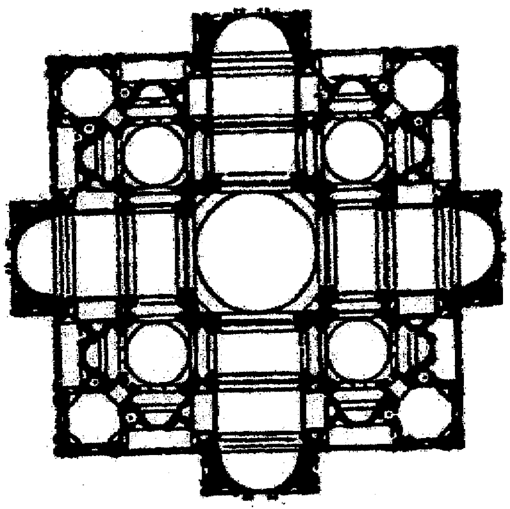
$$\kappa = \frac{-e_1 \cdot e_2 \, (m_1+m_2)}{(m_1 \cdot m_2)}$$ kann + und − sein.

bei $\kappa < 0$ (gleichnam. Ladungen, Abstoß)

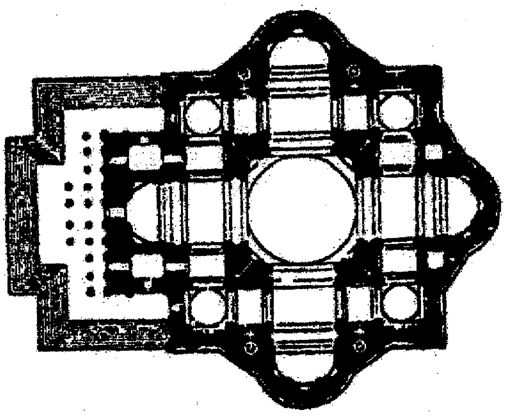


ϑ gleich wie bei Anziehg.

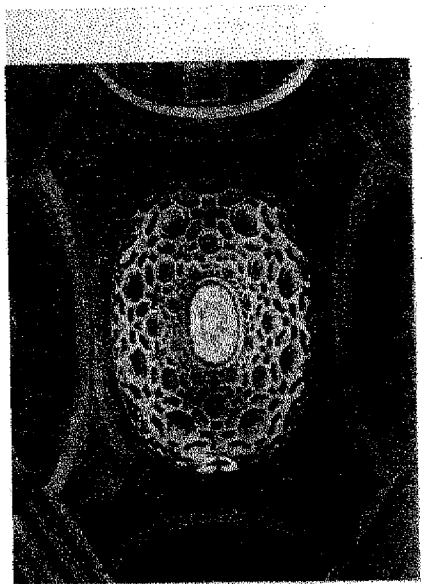
Galilei 1564-1642 Kepler 1571-1630



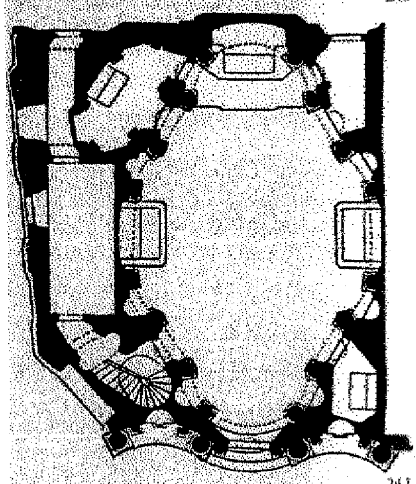
Bramante (1444—1514): Entwurf von 1506. Originalriß nicht erhalten.



Michelangelo (1475—1564): Entwurf von 1547.



240



241

Roma: S. Carlo alle quattro Fontane. Carlo Borromini (1589 bis 1667). — 239. Innen. 1638—41. 240. Kuppel. — 241. Fassade. Seit 1662. — 242. Grundriß.