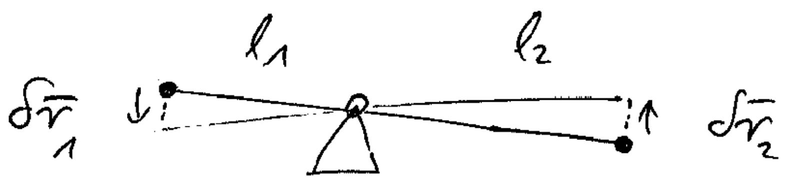
$$\bar{F}_i^{tot} = \underbrace{\bar{F}_i}_{\text{„äußere" Kraft}} + \underbrace{\bar{F}_i^c}_{\text{Zwangskraft}}$$

$$\bar{F}_i^{tot} = 0 \Rightarrow \sum_i \bar{F}_i^{tot} \, \delta\bar{r}_i = 0$$

$$\Rightarrow \sum_i \bar{F}_i \, \delta\bar{r}_i + \sum_i \bar{F}_i^c \, \delta\bar{r}_i = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_i \bar{F}_i \cdot \delta\bar{r}_i = 0}$$ „Prinzip der virtuellen Arbeit"

<u>Anwendungsbeispiel:</u> Hebel



$$\bar{F}_1 \cdot \delta\bar{r}_1 + \bar{F}_2 \cdot \delta\bar{r}_2 = 0$$

$$|F_1| \, l_1 - |F_2| \, l_2 = 0$$

Das d'Alembertsche Prinzip ist nichts weiter als die Verallgemeinerung dieser Überlegungen auf den <u>dynamischen</u> Fall:

5.3 d'Alembertsches Prinzip

statt $\sum_i \bar{F}_i^{tot}\,\delta\bar{r}_i = 0$ (statisch)

betrachte $\sum_i \left(\bar{F}_i^{tot} - m_i\ddot{\bar{r}}_i\right)\delta\bar{r}_i = 0$

Zwangskräfte heben sich heraus

d'Alembertsches Prinzip

$$\boxed{\sum_i \left(\bar{F}_i - m_i\ddot{\bar{r}}_i\right)\cdot\delta\bar{r}_i = 0}$$

nur äußere Kräfte

virtuelle Verrückungen (nicht zu verwechseln mit der echten, durch $\bar{r} = \bar{r}(t)$ beschriebenen Bewegung)

hinzu kommen die Zwangsbedingungen:

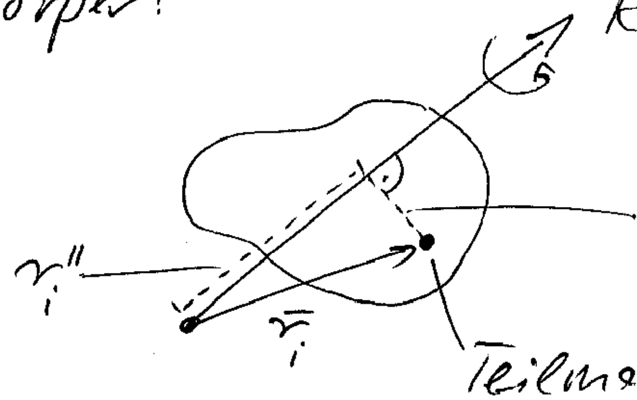
$$\sum_i \bar{f}_i^{\alpha}(\bar{r}_1, \dots, \bar{r}_N)\cdot d\bar{r}_i = 0 \quad ; \quad \alpha = 1 \dots p$$

(holonom od. nicht-holonom)

noch allgemeiner sogar (rheonom)
$\sum_i \bar{f}_i^{\alpha}(\bar{r}_1, \dots, \bar{r}_N, t)\, d\bar{r}_i + f_t^{\alpha}(\dots)\, dt$

Einfache Anwendung: (holonomer Fall)

um eine feste Achse rotierender starrer Körper:



$$\sum_i (\bar{F}_i - m_i \ddot{\bar{r}}_i) \cdot \delta\bar{r}_i = 0 \quad , \quad \delta\bar{r}_i = \delta\bar{\varphi} \times \bar{r}_i$$

als Vektor aufgefaßter Drehwinkel

$$\sum_i \bar{F}_i \cdot (\delta\bar{\varphi} \times \bar{r}_i) - \sum_i m_i (\dot{\bar{\omega}} \times \bar{r}_i) \cdot (\delta\bar{\varphi} \times \bar{r}_i) = 0$$

nur Tangentialbeschleunigung "überlebt" Skalarprodukt mit $\delta\bar{r}_i$

$$\left.\begin{aligned} \bar{a}(\bar{b}\times\bar{c}) &= \bar{b}(\bar{c}\times\bar{a}) = \bar{c}(\bar{a}\times\bar{b}) \\ (\bar{a}\times\bar{b})\cdot(\bar{c}\times\bar{d}) &= (\bar{a}\bar{c})(\bar{b}\bar{d}) - (\bar{a}\bar{d})(\bar{b}\bar{c}) \end{aligned}\right\}$$ Beweis ist einfache Übung zu Eigenschaften von ϵ_{ijk}

$$\delta\bar{\varphi}\cdot\Big[\underbrace{\sum_i \bar{r}_i\times\bar{F}_i}_{\text{Drehmoment } \bar{M}} - m_i\big(\underbrace{\dot{\bar{\omega}}\,(\bar{r}_i^{\,2}) - \bar{r}_i\,(\dot{\bar{\omega}}\cdot\bar{r}_i)}_{(\cdots)\cdot\bar{e}_\omega}\big)\Big]=0$$

$$= |\dot{\bar{\omega}}|\left(|\bar{r}_i|^2 - (r_i^{\parallel})^2\right)$$

$$= |\dot{\bar{\omega}}|(r_i^{\perp})^2$$

$$\Rightarrow \quad M_{\bar{\omega}} = H\cdot|\dot{\bar{\omega}}|$$

auf $\bar{\omega}$ bezogenes Drehmoment

auf $\bar{\omega}$ bezogenes Trägheitsmoment

$$H = \sum_i r_i^{\perp 2} m_i \;\text{"}=\!\int r_\perp^2\,dm\text{"}$$

- viele weitere Beispiele können effizient mit dem d'Alembertschen Prinzip bearbeitet werden
- trotzdem: es ist sinnvoll, die Methode weiter zu formalisieren, um sich ganz allgemein klarzumachen, daß d'Alembertsches Prinzip + (nichtholonome, differentielle) Zwangsbedingungen

die Bewegung des Systems völlig bestimmen:

(⟶ Lagr. Gl.-en 1. Art)

5.4. Lagrangesche Gl.-en 1. Art

Dazu: $\bar{r}_i \; (i = 1 \dots N) \longrightarrow x_i \; (i = 1 \dots 3N)$

d'Alembert: $$\sum_{i=1}^{3N} (F_i - m_i \ddot{x}_i) \delta x_i = 0$$

$$\begin{pmatrix} m_1 = m_2 = m_3, \\ m_4 = m_5 = m_6, \\ \vdots \\ m_{3N-2} = m_{3N-1} = m_{3N} \end{pmatrix}$$

gemeinsam mit:

$$\sum_{i=1}^{3N} f_i^\alpha (x_1, \dots, x_{3N}, t) \, \delta x_i = 0 \; ; \quad \alpha = 1 \dots p$$

(Beachte: dt tritt hier nicht auf, da es sich um virtuelle Verrückungen handelt)

Führe willkürliche Koeff.-en λ^α $(\alpha = 1 \dots p)$, (i.A. $\lambda^\alpha = \lambda^\alpha(t)$) ein und schreibe

$$\sum_{i=1}^{3N} \left(F_i - m_i \ddot{x}_i + \sum_\alpha \lambda^\alpha f_i^\alpha \right) \delta x_i = 0$$

① Wähle die λ^α so daß

$$F_i - m_i \ddot{x}_i + \sum_\alpha \lambda^\alpha f_i^\alpha = 0 \quad \text{für } i = 1 \cdots p$$

② Da bei p Zwangsbedingungen z.B. die Verrückungen $\delta x_{p+1}, \cdots, \delta x_{3N}$ als unabhängig betrachtet werden können, können wir setzen:

$$\delta x_{p+1} \neq 0 \; ; \; \delta x_{p+2} = \cdots = \delta x_{3N} = 0$$

$$\Rightarrow F_{p+1} - m_{p+1} \ddot{x}_{p+1} + \sum_\alpha \lambda^\alpha f_{p+1}^\alpha = 0$$

$$\delta x_{p+2} \neq 0 \; ; \; \delta x_{p+1} = \delta x_{p+3} = \cdots = \delta x_{3N} = 0$$

$$\Rightarrow F_{p+2} - m_{p+2} \ddot{x}_{p+2} - \sum_\alpha \lambda^\alpha f_{p+2}^\alpha = 0$$

usw. bis $\delta x_{3N} = 0$.

Durch ① & ② haben wir jetzt

Lagrangesche Gl.-en 1. Art

$$\boxed{F_i - m_i \ddot{x}_i + \sum_\alpha \lambda^\alpha f_i^\alpha = 0 \quad \text{für } i = 1 \cdots 3N}$$

und
$$\sum_{i=1}^{3N} f_i^\alpha \dot{x}_i + f_t^\alpha = 0 \quad \text{für } \alpha = 1 \cdots p$$

Dies sind $3N+p$ Diff.-gl.-en für die $3N+p$ Unbekannten $x_1 \cdots x_{3N}$ & $\lambda^1 \cdots \lambda^p$.
Damit ist das Problem eines Systems mit
<u>nichtholonomen differentiellen Zwangsbedingungen</u>
prinzipiell gelöst.

(per Definition nur solche, die dem Prinzip der virtuellen Arbeit genügen)

<u>Eine etwas formalere (und m. E. klarere) Herleitung der Lagr. Gleich.-en 1. Art:</u>

Betrachte $\{(F_i - m_i \ddot{x}_i)\}$, $\{\delta x_i\}$, $\{f_i^\alpha\}$
$(\alpha = 1 \cdots p)$ als Vektoren in $\mathbb{R}^{3N}$.

<u>Zwangsbedingungen:</u>

$\{\delta x_i\}$ "physikalisch" $:\Leftrightarrow$ $\{\delta x_i\} \perp \mathrm{Span}\left[\{f_i^\alpha\}, \alpha = 1 \cdots p\right]$

<u>d'Alembertsches Prinzip:</u>
Für alle "physikalischen" $\{\delta x_i\}$ gilt

$$\{\delta x_i\} \perp \{F_i - m_i \ddot{x}_i\}$$

$$\Rightarrow \{F_i - m_i \ddot{x}_i\} \in \mathrm{Span}\left[\{f_i^\alpha\},\ \alpha = 1\ldots p\right]$$

$$\Rightarrow \exists\, \lambda^\alpha \text{ so daß } \{F_i - m_i\ddot{x}_i\} + \sum_\alpha \lambda^\alpha \{f_i^\alpha\}$$

$$= 0 \text{ als Vektor im } \mathbb{R}^{3N}$$

$$\Rightarrow F_i - m_i\ddot{x}_i + \sum_\alpha \lambda^\alpha f_i^\alpha = 0 \quad \text{für } i = 1\ldots 3N$$

$\square$

Physikalische Bedeutung der λ^α:

einfaches Umschreiben als

$$F_i + \sum_\alpha \lambda^\alpha f_i^\alpha = m_i \ddot{x}_i$$

und Vergleich mit dem Newt. Grundgesetz

$$\bar{F}^{tot} = m\ddot{\bar{x}} \quad ; \quad \bar{F}^{tot} = \bar{F}^{\text{äuß.}} + \bar{F}^c$$

zeigt, daß

$$\underline{F_i^c = \sum_\alpha \lambda^\alpha f_i^\alpha} \quad , \quad i = 1\ldots 3N$$

die $3N$ Komponenten der auf die N Teilchen wirkenden Zwangskräfte sind.

5.5 verallg. Koordinaten und Kräfte

Einfache Verallgemeinerung (der Formulierung) des d'Alembertschen Prinzips (und damit auch des Prinzips d. virt. Arbeit):

bei holonomen Zwangsbed. sinnvoll:

N Vektoren $\bar{x}_i$; d holonome Zwangsbed.-en

$\downarrow$

$(3N-d)$ verallgemeinerte Koord.-en q_m ;

explizit bekannt: $\bar{x}_i = \bar{x}_i(q_1, \cdots, q_{3N-d}, t)$

Wir wissen: $(\bar{F}_i - m_i \ddot{\bar{x}}_i) \cdot \delta\bar{x}_i = 0$

(Summation über i implizit,

$$\delta\bar{x}_i = \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial q_m}\,\delta q_m\,, \quad \delta q_m \text{ beliebig})$$

(1) $$\bar{F}_i \cdot \delta\bar{x}_i = \bar{F}_i \cdot \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial q_m}\,\delta q_m \equiv \underbrace{Q_m}_{\text{"verallg. Kraft"}}\,\delta q_m$$

(2) $$\ddot{\bar{x}}_i \cdot \delta\bar{x}_i = \ddot{\bar{x}}_i \cdot \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial q_m}\,\delta q_m =$$

$$= \left[\frac{d}{dt} \left(\dot{\bar{x}}_i \cdot \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial q_m} \right) - \dot{\bar{x}}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial q_m} \right] \delta q_m$$

$$= \left[\frac{d}{dt} \left(\dot{\bar{x}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\bar{x}}_i}{\partial \dot{q}_m} \right) - \dot{\bar{x}}_i \frac{\partial \dot{\bar{x}}_i}{\partial q_m} \right] \delta q_m$$

Dazu:

a) $x = x(q, t)$, $\dot{x} = \frac{\partial x}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial x}{\partial t}$

$\Rightarrow \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial x}{\partial q}$ ✓ (analog "mit Indizes" für x & q)

b) $\frac{d}{dt} \frac{\partial x}{\partial q} = \frac{\partial^2 x}{\partial q^2} \dot{q} + \frac{\partial^2 x}{\partial q \partial t}$

$\frac{\partial \dot{x}}{\partial q} = \frac{\partial^2 x}{\partial q^2} \cdot \dot{q} + \frac{\partial^2 x}{\partial q \partial t}$ ✓

$$= \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_m} \left(\frac{1}{2} \dot{\bar{x}}_i \cdot \dot{\bar{x}}_i \right) - \frac{\partial}{\partial q_m} \left(\frac{1}{2} \dot{\bar{x}}_i \cdot \dot{\bar{x}}_i \right) \right] \delta q_m$$

Insgesamt: $(\bar{F}_i - m_i \ddot{\bar{x}}_i) \delta \bar{x}_i = 0$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\left[Q_m - \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_m} - \frac{\partial}{\partial q_m} \right) T \right] \cdot \delta q_m = 0}$$ mit $T = \frac{m}{2} \dot{\bar{x}}_i \dot{x}_i$ (kinet. Energie)

d'Alemb. Prinzip in verallg. Koordinaten

Die verallg. Koordinaten können nun im Prinzip zusätzlichen nichtholonomen Zwangsbedingungen unterworfen sein:

$$f_m^\alpha \, dq_m + f_t^\alpha \, dt = 0 \quad , \quad \alpha = 1 \dots p .$$

In völliger Analogie zum oben besprochenen Fall kartes. Koordinaten kann man Lagrange-multiplikatoren einführen und schreiben:

$$\left\| \begin{aligned} & Q_m - \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_m} - \frac{\partial}{\partial q_m} \right) T + \lambda^\alpha f_m^\alpha = 0 \\ & f_m^\alpha \dot{q}_m + f_t^\alpha = 0 \end{aligned} \right\|$$

$$\left(\alpha = 1 \dots p , \quad m = 1 \dots s , \; s = 3N - d \right)$$

Dieses System von $s+p$ Diff.gl.-en mit den $s+p$ Unbekannten (Lagrangesche Gl.-en 1. Art für verallg. Koordinaten) ist nun zu lösen.

(→ Übungen)

ganz analog zum Kartesischen Fall:

$$Q_m^{\,c} = \sum_\alpha \lambda^\alpha f_m^\alpha$$

ist die (durch nichtholonome Zwangsbed.-en realisierte) verallgemeinerte Kraft.

Kommentar: Die λ^α heißen "Lagrange-Multiplikatoren" und ihre allgemeinere Bedeutung wird später klarer werden.

6. Lagrangesche Gl.-en 2. Art, das Wirkungsprinzip

6.1. Lagr. Gl.-en 2. Art

- betrachte ein mech. System, beschrieben durch verallg. Koordinaten q_m
- keine zusätzlichen (nichtholon.) Zwangsbed.-en

$\Rightarrow$ d'Alembert: $$Q_m - \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_m} - \frac{\partial}{\partial q_m}\right) T = 0$$

- die (äußeren) Kräfte seien konservativ:

$$\bar{F}_i(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_N) = -\bar{\nabla}_i V(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_N)$$

Gradient bzgl. des Vektors $\bar{x}_i$

verallg. Kräfte

$$Q_m = \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial q_m} \cdot \bar{F}_i = -\left(\bar{\nabla}_i V\right) \cdot \left(\frac{\partial \bar{x}_i}{\partial q_m}\right)$$

$$= - \sum_i \sum_{a=1}^{3} \left[\frac{\partial}{\partial (x_i)^a} V\left(\bar{x}_1(q_1 \cdots q_s), \cdots, \bar{x}_N(q_1 \cdots q_s)\right)\right] \cdot \frac{\partial (x_i)^a (q_1 \cdots q_s)}{\partial q_m}$$

Vektor-Komponenten

$$= - \frac{\partial V}{\partial q_m}$$

Also haben wir

$$- \frac{\partial}{\partial q_m} V - \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_m} - \frac{\partial}{\partial q_m}\right) T = 0$$

Und, da V nicht von $\dot{q}$ abhängt

$$- \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_m} - \frac{\partial}{\partial q_m}\right) \underbrace{\left(T - V\right)}_{\equiv L \text{ – Lagrange-Fkt.}} = 0$$

$$\boxed{\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_m} - \frac{\partial}{\partial q_m}\right) L = 0}$$

Lagr. Gl.-en (2. Art)

Bsp. 1: 1-dim. Bewegung eines Teilchens, Kartesische Koordinate x

$$T = \frac{m}{2}\dot{x}^2 \,, \quad V = V(x)$$

bel. Funktion

$$L = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - V(x)$$

Lagrange: $\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{m}{2}\dot{x}^2 - V(x)\right)$

$$= \frac{d}{dt} m\dot{x} + \frac{\partial}{\partial x} V(x) = m\ddot{x} - F = 0$$

Bsp. 2:

ganz analog: 3-dim. Bewegung

$$T = \frac{m}{2}\dot{\bar{x}}^2 \,, \quad V = V(\bar{x})$$

$$\frac{\partial}{\partial x^a} V(\bar{x}) = -F^a$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{x}^a}\frac{m}{2}\sum_b \dot{x}^b \dot{x}^b = \frac{d}{dt} m\dot{x}^a = m\ddot{x}^a$$

$$\Rightarrow m\ddot{\bar{x}} - \bar{F} = 0$$

Bsp. 3

ganz analog: System wechselwirkender Teilchen

$$T = \sum_i \frac{m_i}{2} \dot{\vec{x}}_i^{\,2} , \quad V = \sum_{i>j} V_{ij}(|\vec{x}_i - \vec{x}_j|)$$

$$\Downarrow$$

$$m \ddot{\vec{x}}_i - \vec{F}_i = 0 \quad \text{für jedes } i \in \{1, \dots, N\}$$

Bsp. 4

(schon eher wirklich & nichttrivial)

Teilchen auf Bahn $\vec{x}(s)$; s sei der Abstand "auf der Bahn".

$$|\dot{\vec{x}}| = \dot{s} \quad \Rightarrow \quad L = \frac{m}{2}\dot{s}^2 - V(\vec{x}(s))$$

$$\Downarrow$$

$$m\ddot{s} - \underbrace{(-\vec{\nabla} V)\cdot \frac{d\vec{x}}{ds}}_{\text{Projektion der Kraft auf Bahnrichtung}} = 0$$

Bsp. 5

Teilchen auf Kreisbahn, beschrieben durch Winkel φ:
$$T = \frac{m}{2} v^2 = \frac{1}{2} m R^2 \omega^2 \quad (\omega = \dot{\varphi})$$

Viele Teilchen:
$$T = \frac{1}{2} \underbrace{\left(\int R^2 dm\right)}_{\text{"}J\text{"}} \omega^2$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}} T + \dots = J\dot{\omega} + \dots$$

... effiziente Art, sofort zu den bequemsten Koordinaten überzugehen. Viel mehr Beispiele in den Übungen ...

6.2 Variationsrechnung

Funktion – Abb. $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto y(x)$$

oder $\mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\bar{x} \longmapsto y(\bar{x})$$

(oder mit $\mathbb{C}$, oder anderen Zahlenkörpern)

Funktional – Abb. $\underbrace{\mathbb{V}}_{\text{geeignet definierter Raum von Funktionen}} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$y \longmapsto F[y]$$

z.B. • sei $\mathbb{V}$ der Raum der differenzierbaren Fkt.-en auf $[0,1]$ mit $y(0) = y(1) = 0$.

• mögliche Funktionale: $F[y] = y(0.5)$; $F[y] = y'(0.5)$; $F[y] = y(0.1) + y(0.5) + y(0.9)$; ...

In unserem Zushg. besonders interessant sind Funktionale von der Form

$$F[y] = \int_0^1 f(y_{(x)}, y'_{(x)}, x)\, dx$$

- eine Fkt. nimmt einen (lokalen) Extremalwert bei $x = x_0$ an, wenn $\underline{y'(x_0) = 0}$ ist.

- <u>wichtiges allgemeines Problem</u>: Welche Bedingungen müssen wir an die Funktion $y_0(x)$ (eine von vielen möglichen Fkt.-en $y(x)$) stellen, damit $F[y_0]$ extremal wird?

zunächst Beispiele:

<u>Bsp 1</u>: kürzeste Strecke von $\bar{y}_1$ nach $\bar{y}_2$?

(Parametrisiere Bahn als $\bar{y} = \bar{y}(\tau)$, $\tau \in [0,1]$)

$$|d\bar{y}| = \left|\frac{d\bar{y}}{d\tau}\right| d\tau \qquad \text{mit } \bar{y}(0) = \bar{y}_1,\ \bar{y}(1) = \bar{y}_2$$

$$\Rightarrow \text{müssen } \int_0^1 d\tau \sqrt{\left(\frac{d\bar{y}}{d\tau}\right)^2} \text{ minimieren}$$

(Antwort natürlich wohlbekannt)

<u>Bsp. 2:</u> (weniger "trivial") – das gleiche "auf der Oberfläche einer Gebirgslandschaft"

Sei $\bar{y} = \bar{y}(\tau)$ die Projektion der Bahn auf eine gedachte horizontale Ebene.

$z(\bar{y})$ beschreibe das Gebirge (d.h. die Höhe).

Infinitesimale Wegstrecke:

$$ds = \sqrt{|d\bar{y}|^2 + |dz|^2}$$

$\Rightarrow$ Minimiere

$$\int_0^1 d\tau \sqrt{\left|\frac{d\bar{y}}{d\tau}\right|^2 + \left((\nabla_y z)\cdot\frac{d\bar{y}}{d\tau}\right)^2}$$

Jetzt zur allgemeinen Lösung:

– Sei, gegeben ein Funktional $F[y] = \int_0^1 f(y, y'(x))dx$,

$y_0(x)$ (also die Fkt. y_0, definiert durch $x \mapsto y_0(x)$ für alle $x \in [0,1]$) die gesuchte Funktion bei der $F[y]$ extrem wird.

– Sei $\delta y(x)$ eine beliebige Fkt. mit $\delta y(0) = \delta y(1) = 0$.

- Dann erfüllt $y_\alpha = y_0 + \alpha\,\delta y$ immer noch die gleichen Randbedingungen wie y_0 und stellt eine Fkt.

$$\begin{array}{ccc} (-\varepsilon, \varepsilon) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \Psi & & \Psi \\ \alpha & \longmapsto & F[y_\alpha] \end{array}$$

zur Verfügung. Diese Fkt. hat offensichtlich bei $\alpha = 0$ ein Extremum.

- also: $\frac{d}{d\alpha} F[y_\alpha] = 0$

$$F[y_\alpha] = \int_0^1 dx\, f(y_0 + \alpha\,\delta y,\ y_0' + \alpha\,\delta y',\ x) = F[y_0] +$$

$$+ \underbrace{\int_0^1 dx \left[\frac{\partial f}{\partial y}(y_0, y_0', x)\cdot \alpha\,\delta y + \frac{\partial f}{\partial y'}(y_0, y_0', x)\cdot \alpha\,\delta y'\right]}_{\text{muß verschwinden}} + O(\alpha^2)$$

beachte: $\delta y' = \frac{d}{dx}\delta y(x)$

man wälze dies durch partielle Integration auf $\frac{\partial f}{\partial y'}$ ab.

bei $y = y_0$

$$\Rightarrow \int_0^1 dx \left[\frac{\partial f}{\partial y}\,\delta y - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\delta y\right] = 0$$

$$\Rightarrow \int_0^1 dx \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right] \delta y = 0$$

für beliebige $\delta y(x)$ $\Rightarrow$ der Ausdruck in der Klammer verschwindet.

Also: y_0 extremalisiert F falls

$$\boxed{\frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0}$$ bei $y = y_0$ für alle $x \in [0,1]$

Eulersche Gleichung.

Wir erkennen sofort:

$$x \to t$$
$$y \to q_m$$

Die Lagr.-en Gl.-en 2. Art sind die zum Funktional

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt \, L(q(t), \dot{q}(t), t)$$

gehörigen Eulerschen Gleichungen. Die entsprechende Bewegung extremalisiert die "Wirkung" S.