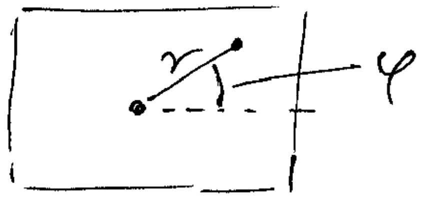
Parametrisiere Lage ab sofort durch r & φ:



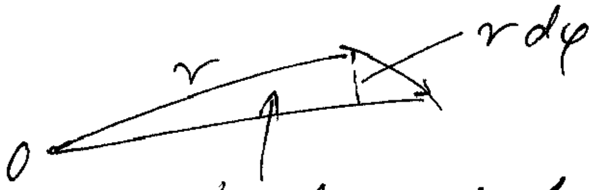
$$\bar{r} = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, 0)$$

$$\dot{\bar{r}} = \dot{r}\,(\cos\varphi, \sin\varphi, 0) + r\dot{\varphi}(-\sin\varphi, \cos\varphi, 0)$$

$$\Rightarrow \dot{\bar{r}}^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2$$

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) - V(r)$$

$$|\bar{L}| = m|\bar{r}\times\dot{\bar{r}}| = m r (r\dot{\varphi}) = m r^2\dot{\varphi} = \text{const.}$$



Fläche $df = \frac{1}{2} r^2 d\varphi$, $\frac{df}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi} = \text{const.}$

$\Rightarrow$ "Flächengeschwindigkeit" ist konstant.
(2. Keplersches Gesetz)

$\mathcal{L}$ hängt nicht von t ab $\Rightarrow$ Energieerhaltung

$$E = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) + V(r) = \text{const.}$$

$$L = m r^2 \dot{\varphi} = \text{const.!}$$

Diese beiden Erhaltungssätze werden zur Lösung genügen!

Bitte nicht mit "$\mathcal{L}$" verwechseln!

$$\dot\varphi = \frac{L}{mr^2}$$

$$E = \frac{m}{2}\dot r^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r)$$

<u>Einschub:</u>

Damit haben wir das Zentralfeldproblem auf die allgemeine 1-dim. Bewegung in einem Potential reduziert:

Sei x die Koordinate, $E = \frac{m}{2}\dot x^2 + U(x) = \text{const.}$

$$\Rightarrow \dot x = \sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}$$

$$dt = dx \Big/ \sqrt{\frac{2}{m}(E-U(x))}$$

$$t = \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-U(x))}}$$

$$t = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-V(r)) - \frac{L^2}{m^2r^2}}}$$

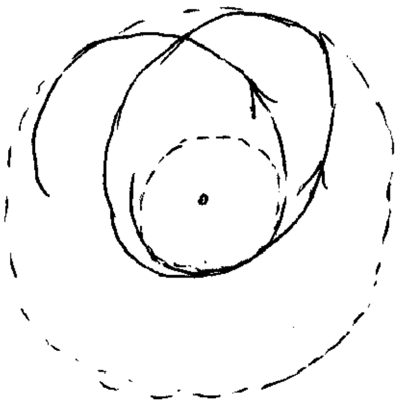
zur Bestimmung der Bahn: $dt = d\varphi \frac{mr^2}{L}$

$$\varphi = \int \frac{\frac{L}{r^2}\,dr}{\sqrt{2m(E-V(r)) - L^2/r^2}}$$

Der Ausdruck unter der Wurzel ist stets ≥ 0.

Wenn er Null ist, tritt ein "Umkehrpunkt" auf: $\frac{d\varphi}{dr} = \infty$; $\frac{dr}{d\varphi} = 0$

z.B.



mit 2 Radien r_{min} und r_{max}.

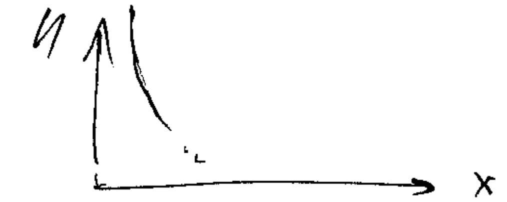
8.2 Kepler-Problem

Jetzt sei speziell $V(r) = -\frac{\alpha}{r}$

Um Intuition zu gewinnen, betrachten wir wieder das oben angesprochene äquivalente 1-dim. Problem: $r \to x$

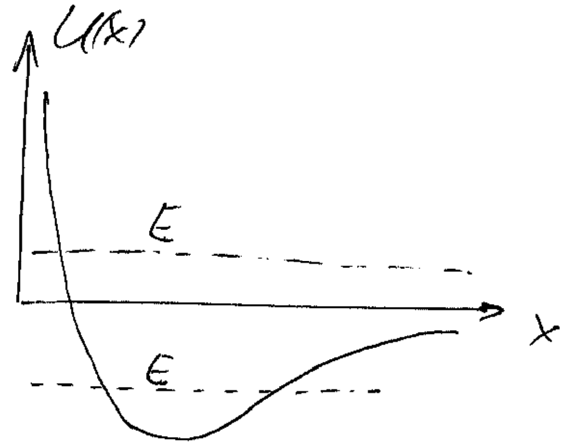
$$E = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + U(x) = \text{const.}, \quad U(x) = \frac{L^2}{2mx^2} - \frac{\alpha}{x}$$

$$U(x) \begin{cases} \sim \frac{1}{x^2} & \text{für } x \to 0 \\ \sim -\frac{1}{x} & \text{für } x \to \infty \end{cases}$$



und

<u>also:</u>



zwei Möglichkeiten:

$E > 0$ und $E < 0$

$E > 0$:

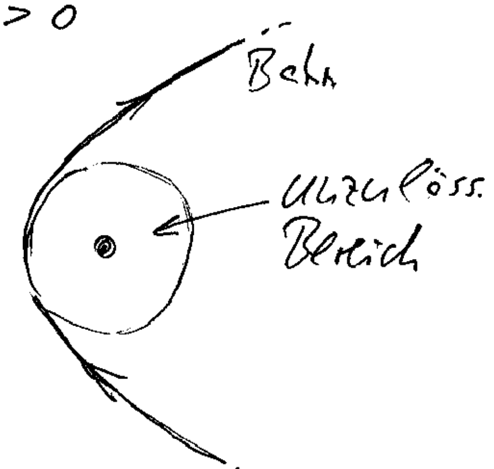
- 1 Punkt mit $E = U$, $T = 0$, $\dot{x} = 0$ (Umkehrpunkt)
- bei $x \to \infty$ ist $E > U \approx 0$, also $T > 0$ & const., also von Null versch. Grenzgeschwindigkeit im Unendlichen

$E < 0$:

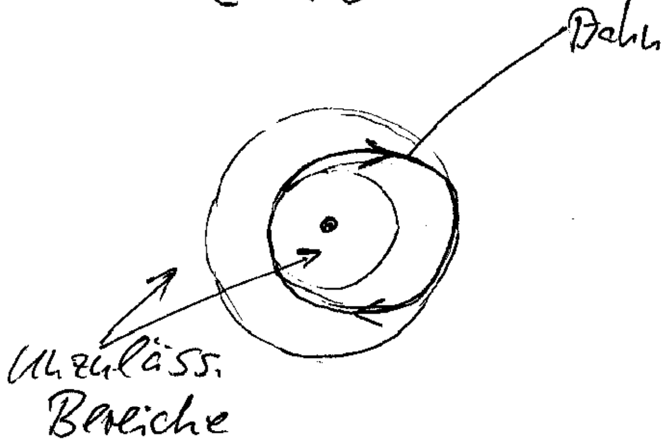
- 2 Punkte mit $E = U$, $T = 0$, $\dot{x} = 0$ (Umkehrpunkte)
- Bewegung nur zwischen diesen beiden Punkten möglich, da $T \geq 0$ und damit immer $E \geq U$.

Zurück zum Kepler-Problem ($x \to r$)

$E > 0$



$E < 0$



Jetzt zur Berechnung der Bahnform:

$$\varphi = \int \frac{\frac{L}{r^2}\,dr}{\sqrt{2m(E - V(r)) - L^2/r^2}} \quad ; \quad V = -\frac{\alpha}{r}$$

$$\frac{1}{r} = s \quad , \quad ds = -\frac{dr}{r^2}$$

$$\varphi = -\int \frac{L\,ds}{\sqrt{2mE + 2m\alpha s - L^2 s^2}}$$

$$= -\int \frac{ds}{\sqrt{\frac{2mE}{L^2} + \frac{2m\alpha}{L^2}s - s^2}}$$

$$= -\int \frac{ds}{\sqrt{-\left(s - \frac{m\alpha}{L^2}\right)^2 + \frac{2mE}{L^2} + \frac{m^2\alpha^2}{L^4}}}$$

Einschub: Das oben benutzte "effektive Potential" der äquivalenten 1-dim. Bewegung ist

$$U = \frac{L^2}{2mx^2} - \frac{\alpha}{x} .$$

Das Minimum liegt bei $U' = 0$, also

$$\left(\frac{L^2}{2mx^2} - \frac{\alpha}{x}\right)'\Big|_{x=x_0} = 0$$

$$-\frac{L^2}{mx_0^3} + \frac{\alpha}{x_0^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = \frac{L^2}{m\alpha}$$

Der Wert von U bei $x = x_0$ ist

$$U_0 = \frac{L^2}{2m x_0^2} - \frac{\alpha}{x_0} = \frac{L^2}{2m}\left(\frac{m\alpha}{L^2}\right)^2 - \frac{m\alpha^2}{L^2}$$

$$= -\frac{m\alpha^2}{2L^2}.$$

Die Bedingung $E > U_0$ lautet also

$$E > -\frac{m\alpha^2}{2L^2} \quad \text{bzw.} \quad E + \frac{m\alpha^2}{2L^2} > 0$$

$$\text{bzw.} \quad \underbrace{\frac{2mE}{L^2} + \frac{m^2\alpha^2}{L^4}}_{\equiv c^2} > 0$$

$$\Rightarrow \varphi = -\int \frac{du}{\sqrt{c^2 - u^2}} \quad \text{mit } u = s - \frac{m\alpha}{L^2}$$

$$\varphi = -\int \frac{dw}{\sqrt{1 - w^2}} \quad \text{mit } w = u/c$$

Jetzt brauchen wir eine "Idee". Diese besteht in der Benutzung inverser trigonometrischer Funktionen: "$\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 \ldots}}$"

Sei $y = \cos(x)$, $x = \arccos(y)$

$$\frac{d(\arccos y)}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{d(\arccos y)}} = \frac{1}{\frac{d(\sin x)}{dx}} = \frac{1}{\cos x} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

Damit haben wir die Stammfunktion identifiziert und können schreiben

$\varphi = -\arccos w$ (wobei φ so definiert wurde, daß die Integrationskonstante verschwindet)

$w = \cos\varphi$

$$\frac{s - \frac{m\alpha}{L^2}}{c} = \cos\varphi \quad ; \quad \frac{1}{r} - \frac{m\alpha}{L^2} = c\cos\varphi$$

bzw. $\frac{p}{r} = 1 + e\cos\varphi$ mit $p = \frac{L^2}{m\alpha}$

und $e = \frac{cL^2}{m\alpha}$

$$e = \frac{L^2}{m\alpha}\sqrt{\frac{2mE}{L^2} + \frac{m^2\alpha^2}{L^4}} = \sqrt{\frac{2EL^2}{m\alpha^2} + 1}$$

Also: $\underbrace{r = \frac{p}{1+e\cos\varphi}}$, $p = \frac{L^2}{m\alpha}$, $e = \sqrt{1+\frac{2EL^2}{m\alpha^2}}$

Kegelschnitte (Kreis, Ellipse, Parabel, Hyperbel)

① $e = 0$, $E = E_{min} = -\frac{m\alpha^2}{2L^2}$

$r = \text{const.} \Rightarrow$ Kreisbahn

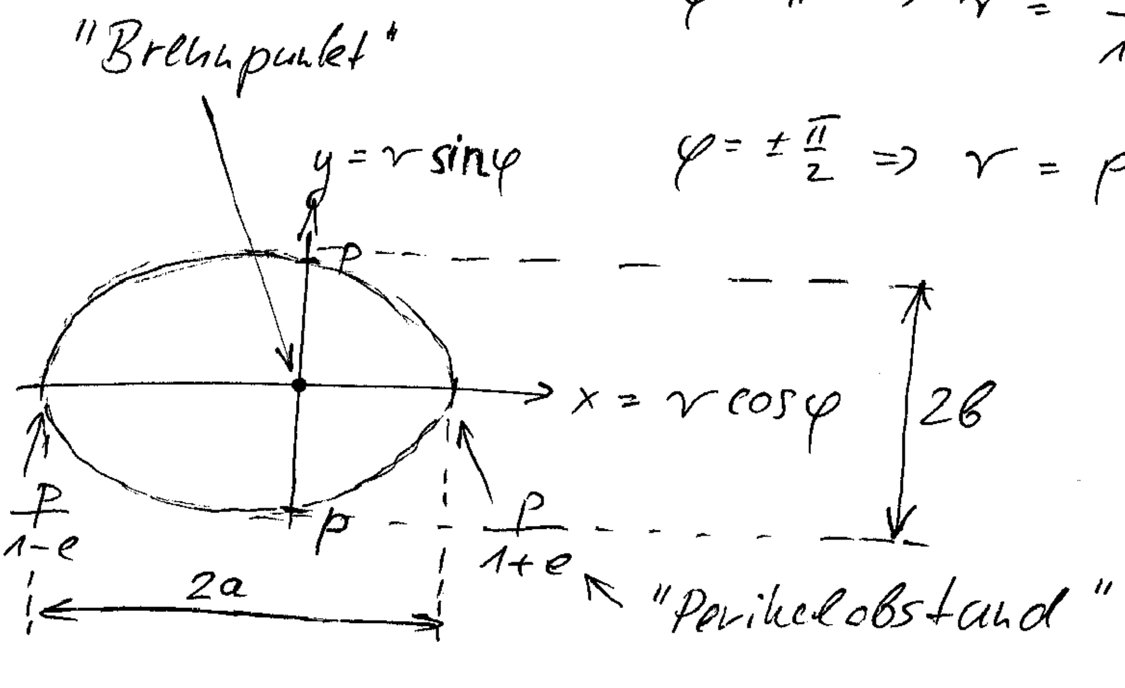
② $0 < e < 1$, $E_{min} < E < 0$

(e – "Exzentrizität") ($\rightarrow$ wir wissen schon, daß r dann immer kleiner als ein gewisses r_{max} bleibt; erwarten also Ellipsen-Bahn.)

genauere Analyse: $\varphi = 0 \Rightarrow r = \frac{p}{1+e}$

$\varphi = \pi \Rightarrow r = \frac{p}{1-e}$

$\varphi = \pm\frac{\pi}{2} \Rightarrow r = p$



$$2a = p\left(\frac{1}{1+e} + \frac{1}{1-e}\right) = \frac{2p}{1-e^2}, \quad \underline{\underline{a = \frac{p}{1-e^2}}}$$

(a – "große Halbachse")

b erhalten wir als Maximalwert von y (bzw. y^2):

$$y^2 = (r\sin\varphi)^2 = r^2(1-\cos^2\varphi)$$

$$= r^2\left(1 - \frac{1}{e^2}\left(\frac{p}{r}-1\right)^2\right) = r^2 - \frac{1}{e^2}(p-r)^2$$

$$\frac{d(y^2)}{dr} = 2\left(r + \frac{1}{e^2}(p-r)\right) \overset{!}{=} 0$$

$$r_0 = \frac{-p/e^2}{1-1/e^2} = \frac{p}{1-e^2}$$

$$y_{max} = r_0\sqrt{1-\frac{1}{e^2}\left(1-e^2-1\right)^2} = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}}$$

$b = y_{max}$; $\underline{\underline{b = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}}}}$ (b – "kleine Halbachse")

Eine (vielleicht bekanntere) Definition der Ellipse ist

$$\frac{\tilde{x}^2}{a^2} + \frac{\tilde{y}^2}{b^2} = 1 .$$

($\tilde{x}, \tilde{y}$ sind in einem anderen Koord.system definiert als x, y)

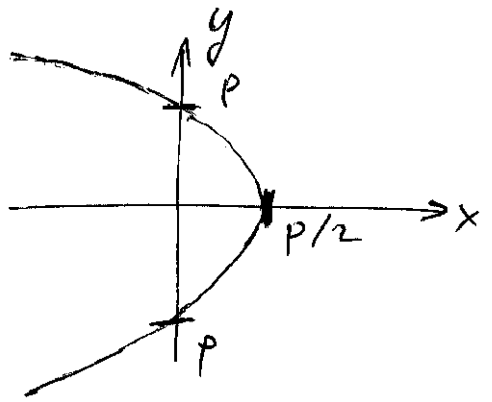
(3) $e = 1$, $E = 0$ $\Rightarrow$ Körper kommt im „Unendlichen", wo $V(r) = 0$ ist, zur Ruhe ($T \to 0$).

$$r = \frac{p}{1+\cos\varphi}$$

$\varphi = 0 \Rightarrow r = p/2$

$\varphi = \pm\pi/2 \Rightarrow r = p$

$\varphi = \pi \Rightarrow r = \infty$



Die Kurve ist eine nach links geöffnete Parabel ($\tilde{y} \sim \tilde{x}^2$ in einem geeignet gewählten Koordinatensystem.)

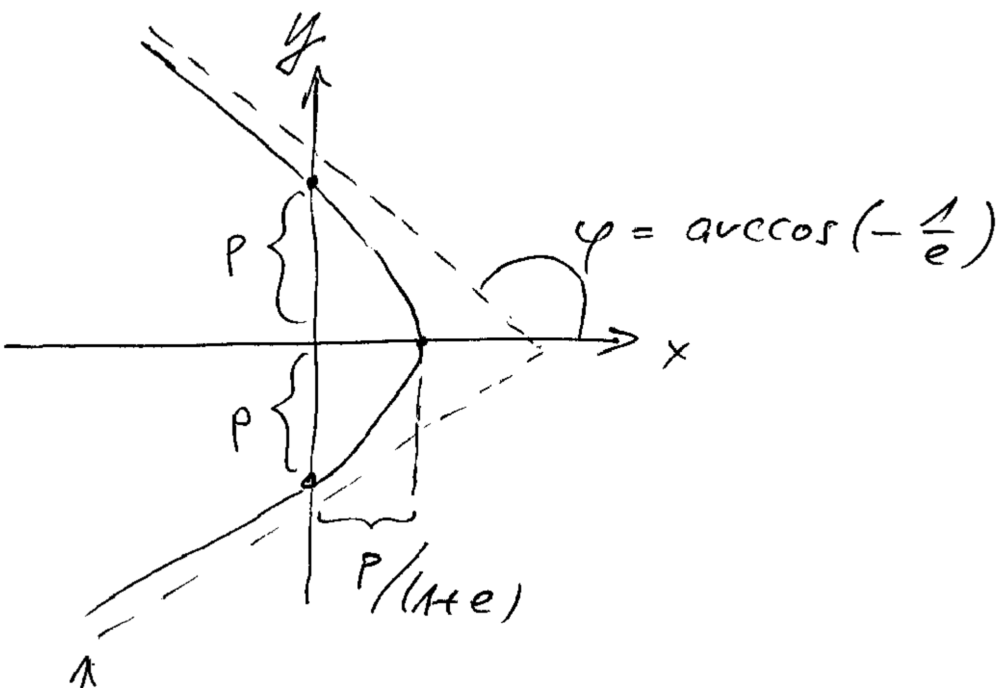
(4) $e > 1$, $E > 0$, Körper hat selbst im Limes $r \to \infty$ noch eine von Null versch. Geschwindigkeit. ($\to$ Hyperbelbahn)

genauere Analyse: $r = \frac{p}{1+e\cos\varphi}$

$\varphi = 0 \Rightarrow r = \frac{p}{1+e}$

$\varphi = \pm\frac{\pi}{2} \Rightarrow r = p$

$r = \infty \Rightarrow 1 + e\cos\varphi = 0$; $\varphi = \arccos\left(-\frac{1}{e}\right)$



Die Bahn nähert sich asymptotisch dieser Geraden, also $r \to \infty$ für $\varphi \to \arccos\left(-\frac{1}{e}\right)$.

Andere Darstellung der Hyperbel:

$$\frac{\tilde{x}^2}{a^2} - \frac{\tilde{y}^2}{b^2} = 1$$

(In etwas anderem Koord.system ($x \to \tilde{x}$, $y \to \tilde{y}$) und mit leicht auffindbaren Beziehungen $a = a(p,e)$ und $b = b(p,e)$.)

- <u>Wir haben:</u> $r = r(\varphi)$ (bzw. $\varphi = \varphi(r)$)
- wünschenswert: Trajektorie $\bar{r} = \bar{r}(t)$
  (zeitl. Ablauf der Bewegung)

Wir hatten schon:

$$t = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V(r)\right) - \frac{L^2}{m^2 r^2}}} \quad ; \; V(r) = -\frac{\alpha}{r}$$

$$t = \int \frac{r\,dr}{\sqrt{\underbrace{\frac{2E}{m}} r^2 + \frac{2\alpha}{m} r - \frac{L^2}{m^2}}}$$

um diesen Faktor auszuklammern brauchen wir jetzt schon eine Fallunterscheidung (wegen verschiedener mögl. Vorzeichen von E):

<u>Ellipse:</u> $\quad E < 0$

$$t = \sqrt{\frac{m}{2|E|}} \int \frac{r\,dr}{\sqrt{-r^2 + \frac{\alpha}{|E|} r - \frac{L^2}{2m|E|}}}$$

$$= \sqrt{\frac{m}{2|E|}} \int \frac{r\,dr}{\sqrt{-\left(r - \frac{\alpha}{2|E|}\right)^2 + \frac{\alpha^2}{4|E|^2} - \frac{L^2}{2m|E|}}}$$

Erinnerung: $a = \frac{p}{1-e^2} = \frac{L^2/(m\alpha)}{-2EL^2/(m\alpha^2)}$

(Ellipse)

$$= \frac{\alpha}{2|E|}$$

$$a^2e^2 = \frac{\alpha^2}{4E^2}\left(1+\frac{2EL^2}{m\alpha^2}\right) = \frac{\alpha^2}{4|E|^2} - \frac{L^2}{2m|E|}$$

Also:

$$t = \sqrt{\frac{m}{2|E|}} \int \frac{r\,dr}{\sqrt{a^2e^2-(r-a)^2}}$$

$$r-a = s\,a\,e$$

$$dr = ds\,a\,e$$

$$t = \sqrt{\frac{m}{2|E|}}\, ae \int \frac{\left(s+\frac{1}{e}\right)ds}{\sqrt{1-s^2}}$$

Wie schon oben, sind trigonom. Fkt.-en hilfreich:

$s = -\cos\eta \quad , \qquad ds = +(\sin\eta)\,d\eta$

$$t = \sqrt{\frac{m}{2|E|}}\, ae \int \left(\frac{1}{e} - \cos\eta\right) d\eta$$

$$t = \sqrt{\frac{m}{2|E|}}\, ae\left(\frac{\eta}{e} - \sin\eta\right)$$

Schließlich:
$$t = \sqrt{\frac{ma^2}{2|E|}}\,(\eta - e\sin\eta)$$
$$r = a(1 - e\cos\eta)$$

Parameterdarstellung der Trajektorie $r(t)$ (und damit, wegen des uns bereits bekannten $\varphi(r)$, auch von $\varphi(t)$).

Mehr ist leider nicht möglich!

Analog für Hyperbel:
$$t = \sqrt{\frac{ma^2}{2|E|}}\,(e\sinh\eta - \eta)$$
$$r = a(e\cosh\eta - 1)$$

$\rightarrow$ Landau/Lifschitz

Umlaufzeit im Fall der Ellipse:

$$T = \int_{1\,\text{Umlauf}} dt = \left\{ \begin{array}{l} L = mr^2\dot\varphi \\ \frac{df}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot\varphi \end{array} \right\} = \int_{1\,\text{Umlauf}} df \Big/ \left(\tfrac{1}{2}r^2\dot\varphi\right)$$

$$= \frac{2m}{L}\int_{1\,\text{Umlauf}} df = \frac{2m}{L}\,F_{\text{Ellipse}} = \frac{2m}{L}\cdot \pi a b$$

Nebenrechnung: Fläche einer Ellipse

Ellipse: $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$

$\downarrow \quad x = ax', \; y = by'$

Kreis: $(x')^2 + (y')^2 = 1$

$$F_{\text{Ellipse}} = \underbrace{\int dx\,dy}_{\text{Ellipsen-Inneres}} = ab \underbrace{\int dx'dy'}_{\substack{\text{Kreis-Inneres} \\ \text{(mit Radius 1)}}} = \pi ab$$

$$T = \frac{2\pi m}{L} \cdot \frac{p^2}{\sqrt{1-e^2}^{\,3}} = \frac{2\pi m}{L} \cdot \frac{(L^2/m\alpha)^2}{(2|E|L^2/m\alpha^2)^{3/2}}$$

$$= \pi\alpha \sqrt{\frac{m}{2|E|^3}}$$

oder (mit $a = \frac{\alpha}{2|E|}$, $|E| = \frac{\alpha}{2a}$): $T = 2\pi a^{3/2}\sqrt{\frac{m}{\alpha}}$

3. Keplersches Gesetz

Kommentare:

① Eine analoge Analyse für $V = +\frac{\alpha}{r}$ liefert stets Hyperbelbahnen ($\frac{p}{r} = -1 + e\cos\varphi$)

② Der "Lenz'sche Vektor" $\bar{v} \times \bar{L} - \alpha\bar{r}/r$ ist eine zusätzl. Erhaltungsgröße (siehe Übungen und siehe weiter unten)

8.3 Zwei-Körper-Problem

Die Bedeutung der obigen Analyse des Zentralkraftproblems wird dadurch verstärkt, daß sich das allgemeine "Zwei-Körper-Problem" darauf zurückführen läßt:

$$\mathcal{L} = \frac{m_1 \dot{\bar{r}}_1^{\,2}}{2} + \frac{m_2 \dot{\bar{r}}_2^{\,2}}{2} - V(\bar{r}_1 - \bar{r}_2)$$

Sei $\bar{r} = \bar{r}_1 - \bar{r}_2$ (Relativkoordinate)

und $\bar{r}_S = (m_1 \bar{r}_1 + m_2 \bar{r}_2)/M \quad (M \equiv m_1 + m_2)$

(Schwerpunktkoordinate)

Einfache Algebra $\Rightarrow$ $\bar{r}_1 = \bar{r}_S + \frac{m_2}{M} \bar{r}$

$\bar{r}_2 = \bar{r}_S - \frac{m_1}{M} \bar{r}$

Einsetzen in $\mathcal{L}$ liefert: (mit $m \equiv \frac{m_1 m_2}{M}$) "reduzierte" Masse

$$\mathcal{L} = \underbrace{\frac{M}{2} \dot{\bar{r}}_S^{\,2}}_{\text{freie Bewegung des Schwerpunktes}} + \underbrace{\frac{m}{2} \dot{\bar{r}}^{\,2} - V(\bar{r})}_{\text{Zentralkraftproblem mit "unendlich schwerem" Zentralkörper}}$$

Dies ist hochrelevant für Astrophysik / Physik des Planetensystems:

z.B.: – Erde & Mond rotieren um gemeinsamen Schwerpunkt
– die für die Bewegung relevante Masse ist $m = \frac{m_{Erde}\, m_{Mond}}{m_{Erde} + m_{Mond}} \simeq m_{Mond}$

aber nicht "="

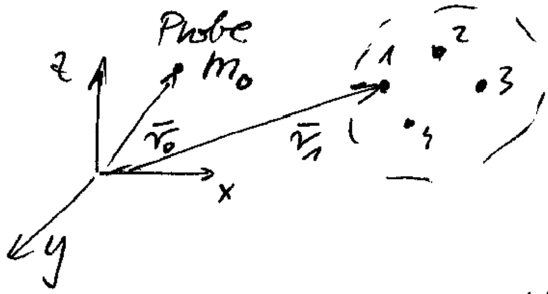
8.4 Zur Gravitation ausgedehnter Körper

- Die bisherige Punktmassenannahme ist in vielen Fällen (z.B. "Erde-Mond", oder, noch mehr bei "Erde-Satellit") nicht sehr präzise.
Läßt sich dies korrigieren?

- entscheidend: Kräfte (und damit das bei kons. Kräften zugrundeliegende $V(\vec{r})$) sind additiv.

Achtung! in der Allg. Rel.theorie ist dies nicht mehr so, da das Gravit.feld nichtlinearen Gleichungen gehorcht. Für typische "schwache" Felder ist dies unwichtig.

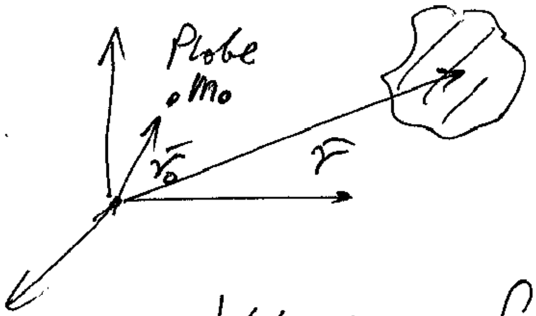
Das heißt explizit:



Ansammlung von Punktmassen

$$V(\bar{r}_0) = \sum_{i=1}^{N} \left(- \frac{m_0 m_i G_N}{|\bar{r}_0 - \bar{r}_i|} \right)$$

oder



ausgedehnte Körper

$$V(\bar{r}_0) = - \int \frac{dm \; G_N m_0}{|\bar{r}_0 - \bar{r}|}$$

hängt von Position von "dm" ab.

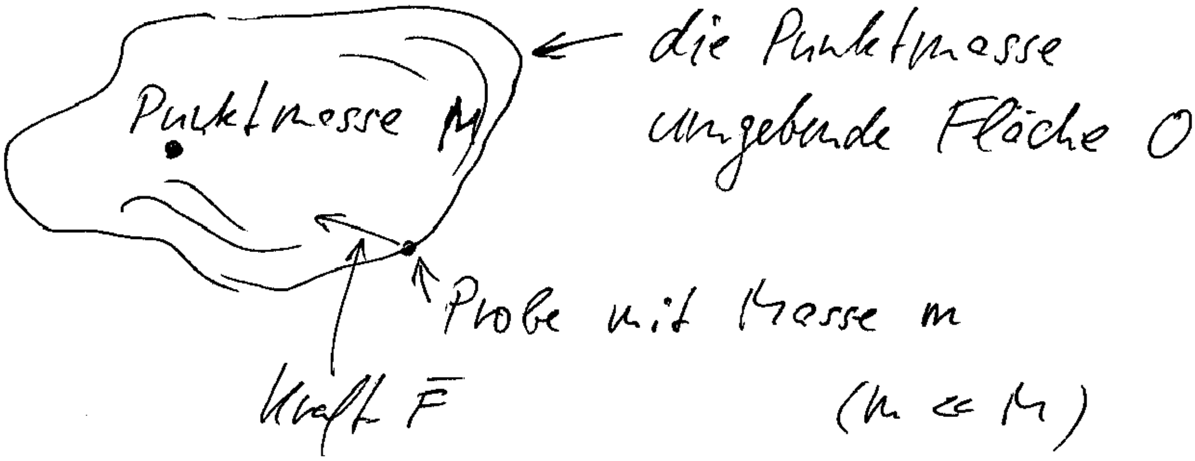
$$= - m_0 G_N \int \frac{d^3r \; \rho(\bar{r})}{\sqrt{(\bar{r}_0 - \bar{r})^2}}$$

$(d^3r = dx\,dy\,dz)$

$$= - m_0 G_N \int \frac{dx\,dy\,dz \; \rho(x,y,z)}{\sqrt{(r_{0,x} - x)^2 + (r_{0,y} - y)^2 + (r_{0,z} - z)^2}}$$

Integral über Körpervolumen

Oft wirklich: Frage nicht nach Kraft (bzw. Potential) an einem Punkt sondern nach einem gewissen Integral davon:



Berechne: $I = \int_O \bar F \cdot d\bar f$ ← Flächenelement

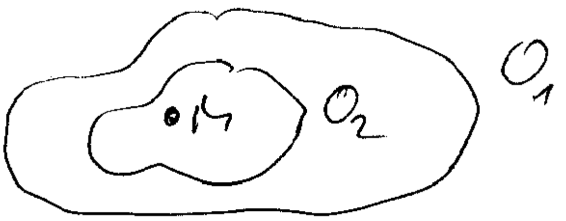
nach Gauß:

$$I = \int_{\text{Vol.}} d(\text{Vol.})\,(\bar\nabla \bar F) = -\int_{\text{Vol.}} d(\text{Vol.})\,\bar\nabla^2 V$$

(Inneres von O)

($\bar F = -\bar\nabla V$)

Betrachte jetzt zwei unterschiedliche, die Punktmasse M umgebende Flächen:



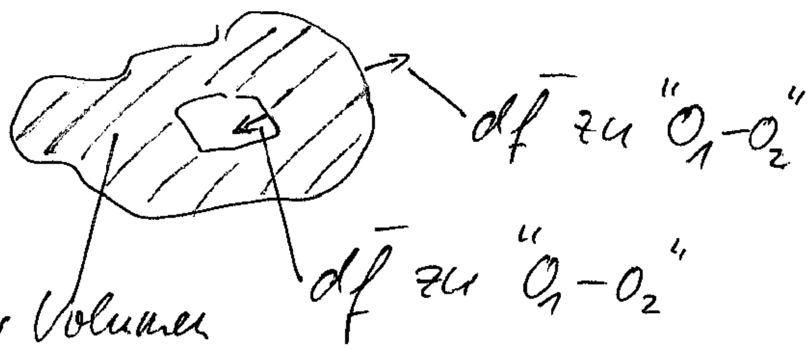
$$I_{1,2} = \int_{O_1,\,O_2} \bar{F}\,d\bar{f} \quad \text{wie oben.}$$

$$I_1 - I_2 = \int_{O_1} \bar{F}\,d\bar{f} - \int_{O_2} \bar{F}\,d\bar{f} = \int_{O_1} \bar{F}\,d\bar{f} + \int_{\tilde{O}_2} \bar{F}\,d\bar{f}$$

umgekehrt orientierte Oberfläche

$$= \int_{\text{"}O_1 - O_2\text{"}} \bar{F}\,d\bar{f}$$

"$O_1 - O_2$" ← Oberfläche des "Zwischenraumes" zwischen O_1 und O_2



Inneres Volumen zu "$O_1 - O_2$", das wir mit "$Vol_1 - Vol_2$" bezeichnen wollen.

Gauß:

$$I_1 - I_2 = -\int_{Vol_1 - Vol_2} d(\text{Vol.})\,\nabla^2 V$$