oder:

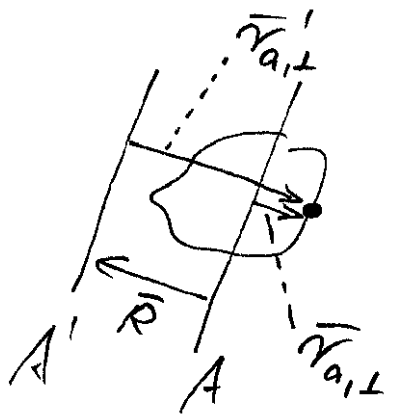
$$T = \frac{1}{2} J_A \omega^2 \quad \text{mit} \quad J_A = \sum_a m_a \bar{r}_{a,\perp}^2$$

A bezeichne die gewählte Achse

$|\bar{r}_{a,\perp}|$ ist der Abstand der Punktmasse A von dieser Achse

|| J_A - Trägheitsmoment bzgl. der Achse A ||

Betrachte eine weitere Achse A', die sich aus A durch Verschiebung um $\bar{R}$ ergibt ($\bar{R}$ sei orthogonal zu A & A').



$$J_{A'} = \sum_a m_a (\bar{r}_{a,\perp}')^2$$

$$= \sum_a m_a (\bar{r}_{a,\perp} - \bar{R})^2$$

$$\bar{r}_{a,\perp} = \bar{R} + \bar{r}_{a,\perp}'$$

Annahme: A gehe durch den Schwerpunkt des Körpers, also $\sum_a m_a \bar{r}_a = 0$, wobei die $\bar{r}_a$ bzgl. des auf A liegenden Schwerpunktes definiert sind.

$$\Rightarrow \sum_a m_a \bar{r}_{a,\perp} + \sum_a m_a \bar{r}_{a,\parallel} = 0$$

$$\Rightarrow \sum_a m_a \bar{r}_{a,\perp} = 0$$

$$\Rightarrow J_{A'} = \sum_a m_a \left(\bar{r}_{a,\perp}^{\,2} - 2\bar{R} \cdot \bar{r}_{a,\perp} + \bar{R}^2 \right)$$

$$\boxed{J_{A'} = J_A + M R^2}$$ Steinerscher Satz

J_A: Trägheitsmoment bzgl. einer durch den Schwerpkt. gehenden Achse A

R: Abstand der Achse A' von der Schwerpunktsachse A

10.2 Trägheitstensor

Die allgemeinste Bewegung eines starren Körpers ist die Überlagerung von Translation und Rotation

Rotation $\downarrow$ $\bar{\omega}$

Translation $\downarrow$ $\bar{v}$

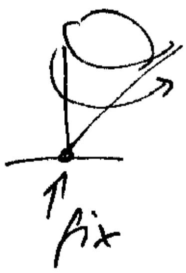
i.A. beide zeitabhängig sowohl in Betrag als auch in Richtung

$$T = \sum_a \frac{m_a}{2} (\underset{\substack{\uparrow \\ \text{durch} \\ \text{Translation}}}{\bar{v}} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{durch} \\ \text{Rotation}}}{\bar{\omega} \times \bar{r}_a})^2$$

(um Ursprung des Koord.systems)

$$= \sum_a \frac{m_a}{2} \left(\bar{v}^2 + \underbrace{2\bar{v} \cdot (\bar{\omega} \times \bar{r}_a)}_{=0,\ \text{falls}} + (\bar{\omega} \times \bar{r}_a)^2 \right)$$

a) $\bar{v} = 0$ (Körper ist im Ursprung fixiert, z.B.



Kreisel mit festem Auflagepunkt)

oder

b) $\sum_a m_a \bar{r}_a = 0$ (Ursprung fällt mit Schwerpunkt des Körpers zusammen)

In diesen Fällen gilt:

$$T = \frac{M}{2} \bar{v}^2 + \underbrace{\sum_a \frac{1}{2} m_a (\bar{\omega} \times \bar{r}_a)^2}$$

wie bei 9.1., aber jetzt soll die Richtung von $\bar{\omega}$ variabel sein.

Wie bei 9.1:

$$\sum_a \frac{1}{2} m_a (\bar{\omega} \times \bar{r}_a)^2 = \sum_a \frac{1}{2} m_a \left(\bar{\omega}^2 \bar{r}_a^{\,2} - (\bar{\omega} \cdot \bar{r}_a)^2 \right)$$

$$= \frac{1}{2} \underbrace{\left\{ \sum_a m_a \left(\delta_{ij} \, \bar{r}_a^{\,2} - (\bar{r}_a)_i (\bar{r}_a)_j \right) \right\}}_{\Theta_{ij} \text{ - Trägheitstensor}} \bar{\omega}_i \bar{\omega}_j$$

(Dies ist in der Tat ein Tensor, da δ_{ij} ein Tensor, $(\bar{r}_a)_i$ - Vektoren, $\bar{r}_a^{\,2}$ - Skalare)

$$\Rightarrow \boxed{T = \frac{M}{2} \bar{v}^2 + \frac{1}{2} \Theta_{ij} \bar{\omega}_i \bar{\omega}_j}$$

auch J_{ij}, I_{ij} etc.

Das Trägheitsmoment bzgl. einer durch $\hat{e}$ ($|\hat{e}| = 1$) definierten Achse ist

$$\Theta_{\hat{e}} = J_{\hat{e}} = \Theta_{ij} \hat{e}_i \hat{e}_j$$

wobei dann

$$T = \frac{M}{2} \bar{v}^2 + \frac{1}{2} J \bar{\omega}^2 \text{, wie oben.}$$

$$\left(\bar{\omega}_i \bar{\omega}_j = \hat{e}_i |\bar{\omega}| \hat{e}_j |\bar{\omega}| = \hat{e}_i \hat{e}_j \bar{\omega}^2 \right)$$

ganz explizit: (mit $(x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$)

$$\Theta_{ij} = \sum_a m_a \begin{pmatrix} y_a^2 + z_a^2 & -x_a y_a & -x_a z_a \\ -y_a x_a & x_a^2 + z_a^2 & -y_a z_a \\ -z_a x_a & -z_a y_a & x_a^2 + y_a^2 \end{pmatrix}$$

Θ_{ij} ist eine symmetrische Matrix.

Wird der Körper (bei festem Koord.system) um R rotiert, so geht Θ_{ij} über in

$$\Theta'_{ij} = R_{ik} R_{jl} \Theta_{kl} .$$

(Analog für Rotation des Koord.systems bei festem Körper.)

In Matrixschreibweise: $\Theta' = R \Theta R^{-1}$

$(R^{-1} = R^T)$

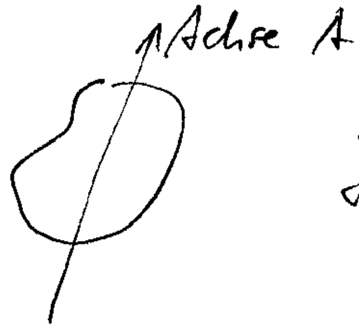
Jede symm. Matrix kann durch eine orthogonale Trf. diagonalisiert werden

$\Rightarrow$ Der Körper kann stets so gedreht werden, daß

$$\Theta_{ij} = \begin{pmatrix} \Theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \Theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_3 \end{pmatrix},$$

also $T_{rot} = \frac{1}{2} \left(\Theta_1 \omega_1^2 + \Theta_2 \omega_2^2 + \Theta_3 \omega_3^2 \right)$

Zur expliziten Berechnung von Trägheitsmomenten:



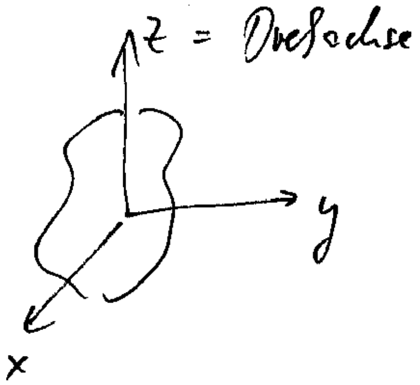
$$J_A = \sum_a m_a \bar{r}_{a,\perp}^2$$

Kontinuierlicher Fall: $\downarrow$ $\quad m_a \longrightarrow \rho\, dV$, $\quad \sum_a \longrightarrow \int$

$$J_A = \int_{Vol.} dV \cdot r_\perp^2 \cdot \rho(\bar{r})$$

$r_\perp$: Abstand des Vol. elements dV von Achse

z.B. sei die Achse = z-Achse eines kartes. Koord.systems



$$\Rightarrow J_z = \int_{Vol.} dx\,dy\,dz\; \rho(\bar{r}) \cdot (x^2+y^2)$$

Analog für Trägheitstensor:

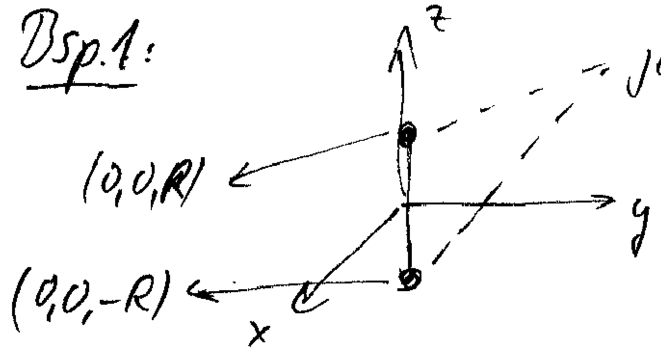
$$\Theta_{ij} = \sum_a m_a \left(\delta_{ij} \bar{r}_a^2 - (\bar{r}_a)_i (\bar{r}_a)_j \right)$$

$$\downarrow$$

$$\Theta_{ij} = \int \rho(\bar{r})\, dx_1 dx_2 dx_3 \left(\delta_{ij} (x_1^2+x_2^2+x_3^2) - x_i x_j \right)$$

Zur phys. Intuition für Trägheitstensor:

Bsp. 1:



jeweils Masse m, Verbindungsstab sei masselos (Länge $2R$)

$$\Theta_{ij} = 2mR^2\delta_{ij} - mR^2\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}_{ij} - mR^2\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}_{ij}$$

$$= 2mR^2\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}_{ij}$$

$T_{rot} = \frac{1}{2}\omega^T\Theta\omega \Rightarrow$ Rotation um x- od. y-Achse braucht Energie;

Rotation um z-Achse kostet keine Energie (ist kein echter Freiheitsgrad.)

Bsp. 2: Kugel (homogen)

$\Theta_{ij} \sim mR^2\delta_{ij}$, denn

a) Θ_{ij} ist ein Tensor

b) Θ_{ij} ist unter Drehungen invariant, also $\Theta = R \, \Theta \, R^T$

für jedes $R \in SO(3)$ $\Rightarrow$ $\Theta \quad \mathbb{1}$

("δ_{ij} ist der einzige invariante Tensor mit 2 Indizes")

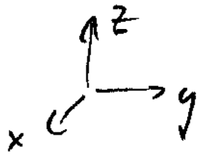
Beweis erfordert (elementare) Darstellungstheorie von Gruppen.

<u>Geometrische Darstellung eines symm. Tensors:</u>

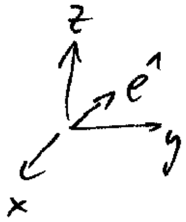
Vektor $\rightarrow$ "Pfeil"

Tensor $\rightarrow$ "Fläche 2. Grades"

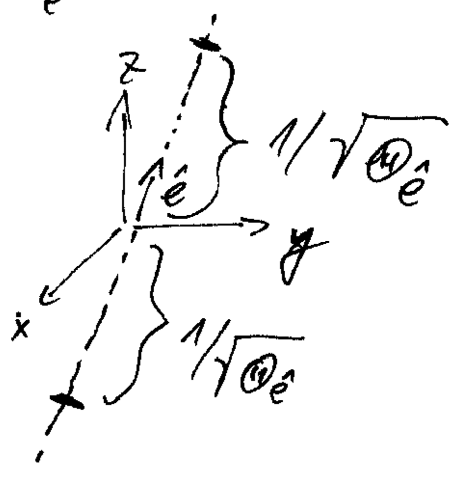
- Wähle kartes. Koord.system



- Wähle beliebigen Einheitsvektor $\hat{e}$:



- Trage auf der durch $\hat{e}$ festgelegten Geraden den Wert von $1/\sqrt{\Theta_{\hat{e}}}$ ab (mit $\Theta_{\hat{e}} = \hat{e}_i \, \Theta_{ij} \, \hat{e}_j$)



Für die beiden so gewählten Punkte gilt:

$$x^2 + y^2 + z^2 = \sum_i x_i^2 = |\bar{x}| = \frac{1}{\sqrt{\Theta_{\hat{e}}}}$$

bzw.

$$\Theta_{\hat{e}} \cdot |\bar{x}|^2 = 1$$

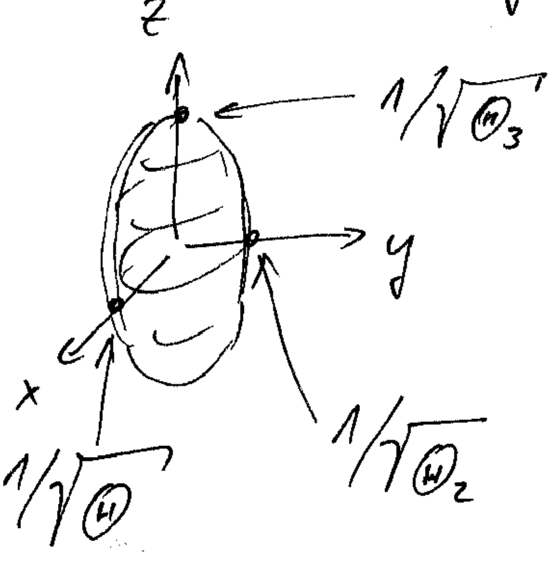
$$\hat{e}_i |\bar{x}| \; \Theta_{ij} \; \hat{e}_j |\bar{x}| = 1$$

$$x_i \Theta_{ij} x_j = 1$$ – Dies definiert eine "Fläche 2. Grades", genauer, ein <u>Ellipsoid</u>.

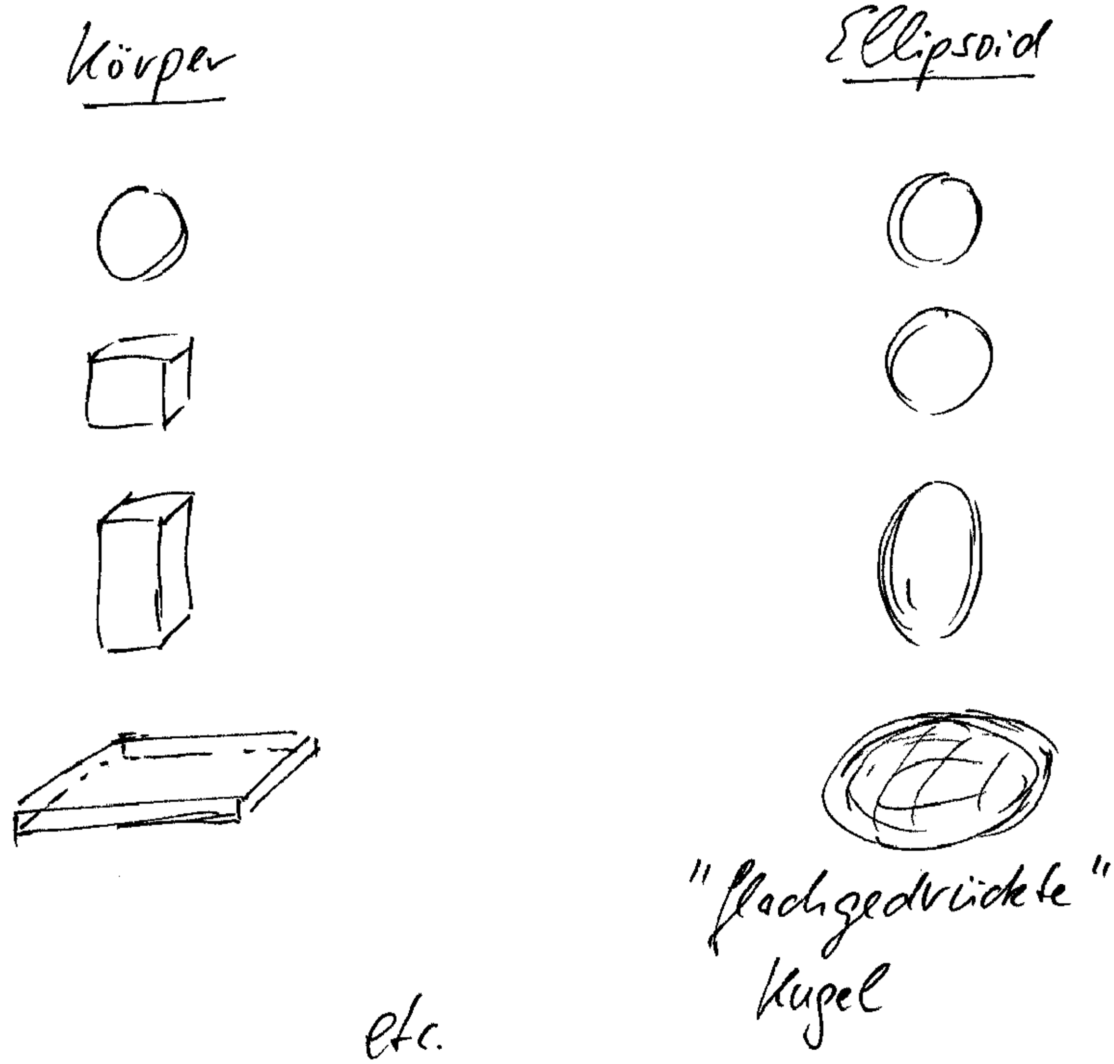
(<u>hier</u>: das "Trägheitsellipsoid" eines Körpers")

z.B. wenn Θ_{ij} diagonalisiert ist, gilt

$$x^2 \Theta_1 + y^2 \Theta_2 + z^2 \Theta_3 = 1$$



Das Trägheitsellipsoid folgt (in etwa) der Form des Körpers:



Drehimpuls eines rotierenden starren Körpers:

$$L = \sum_a \bar{r}_a \times \bar{p}_a \quad , \quad \bar{p}_a = m_a \bar{\omega} \times r_a$$

$$= \sum_a m_a \bar{r}_a \times (\bar{\omega} \times \bar{r}_a)$$

$$L_i = \sum_a m_a \quad \varepsilon_{ijk} (r_a)_j (\bar{\omega} \times \bar{r}_a)_k$$

$$= \sum_a m_a \; \varepsilon_{ijk} (r_a)_j \; \varepsilon_{klm} \omega_l (r_a)_m$$

$$\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{kij}$$

$$\varepsilon_{kij}\varepsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$$

$$L_i = \sum_a m_a (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})(r_a)_j (r_a)_m \omega_l$$

$$= \sum_a m_a (\delta_{il}\bar{r}^2 - (r_a)_i (r_a)_l)\omega_l$$

$$L_i = \Theta_{ij}\omega_j$$

Zur Erinnerung & als Vorbereitung auf Kreiseltheorie:

- v – beliebiger Vektor
- v' – gehe aus v durch Rotation $R \in SU(3)$ hervor: $v' = Rv$
- R und v seien zeitabhängig

Dann gilt (siehe Kapitel 4):

im rotierenden System

$$v'(t) = R(t)v(t)$$

$$\dot{v}'(t) = \dot{R}(t)v(t) + R(t)\cdot\dot{v}(t)$$

$$= R(\omega(t) \times v(t)) + R(t)\cdot\dot{v}(t)$$

momentane Winkelgeschwindigkeit

$$\dot{v}' = R\dot{v} + R(\omega \times v) = R\dot{v} + (R\omega)\times(Rv)$$

$$\dot{v}' = R\dot{v} + \omega' \times v'$$

mom. Winkelgeschw. im Inertialsystem

Nachtrag zum Trägheitstensor:

- die Eigenwerte von Θ_{ij} heißen
  <u>Hauptträgheitsmomente</u>
- die Achsen die, als Koordinatenachsen gewählt, zu einer diagonalen Form von Θ_{ij} führen heißen
  <u>Hauptträgheitsachsen</u>
- für jede dieser Achsen gilt (Bezeichnung: $\hat{e}$)

$$\Theta_{ij} \cdot \hat{e}_j = \Theta_{\hat{e}} \cdot \hat{e}_i \, ,$$

es sind also <u>Eigenvektoren</u> von Θ_{ij}.

(Dies ist eine vom Koord.system unabhängige Aussage.)

Nachtrag zu Symmetrien & Noether-Theorem

$$\mathcal{L} = \sum_i \frac{m_i}{2} \dot{\bar{x}}_i^2 - \sum_{ij} V_{ij}(\bar{x}_i - \bar{x}_j)$$

Symmetrie: $\bar{x}_i \longrightarrow \bar{x}_i + \delta\bar{v}\, t$

(infinitesimaler Galilei-Boost)

Nach Noether-Theorem von S. 78 ist

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{x}}_i} \delta \bar{x}_i - \delta f \quad \text{erhalten, falls}$$

$$\delta\mathcal{L} = \frac{d}{dt}(\delta f) \quad \text{gilt.}$$

Dies ist hier in der Tat der Fall:

$$\delta\mathcal{L} = m_i \dot{\bar{x}}_i \cdot \delta\bar{v} = \frac{d}{dt}\big(\underbrace{m_i \bar{x}_i \cdot \delta\bar{v}}_{\equiv \delta f}\big)$$

Die Erhaltungsgröße ist demnach:

$$m_i \dot{\bar{x}}_i \cdot (\delta\bar{v}\, t) - m_i \bar{x}_i \cdot \delta\bar{v}.$$

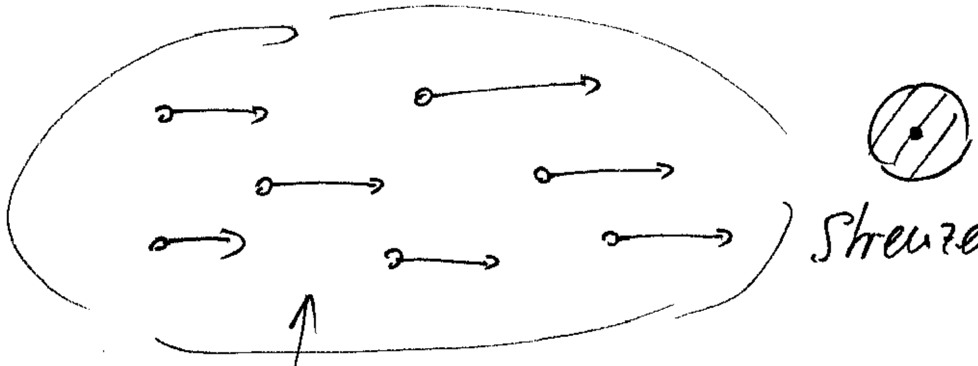
Definiere $\bar{v}_s = (m_i \dot{\bar{x}}_i)/M$ und $\bar{x}_s = (m_i \bar{x}_i / M)$.
und teile obige Erhaltungsgröße durch M:

$\Rightarrow (\bar{v}_s\, t - \bar{x}_s) \cdot \delta\bar{v}$ (mit $\delta\bar{v}$ beliebig) ist erhalten,

$\Rightarrow$ $\underline{\underline{\bar{v}_s t - \bar{x}_s}}$ ist erhalten.

($\hat{=}$ gleichförmige Bewegung des Schwerpunktes)

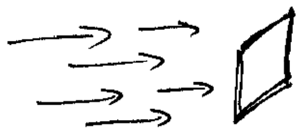
9.4 Der Wirkungsquerschnitt



Streuzentrum (fix)

Teilchenstrahl (viele identische Teilchen)
- sei homogen und zeitunabhängig
- Geschwindigkeit v für jedes Teilchen gleich
- charakterisiert durch $n = \dfrac{\text{Teilchenzahl}}{\text{Fläche} \cdot \text{Zeit}}$

senkrecht zum Strahl



Sei $N = \dfrac{\text{Zahl der gestreuten Teilchen}}{\text{Zeit}}$

$$= \frac{\#\text{ d. Teilchen}}{\begin{pmatrix}\text{Fläche des}\\ \text{Targets}\end{pmatrix} \cdot (\text{Zeit})} \cdot \begin{pmatrix}\text{Fläche des}\\ \text{Targets}\end{pmatrix}$$

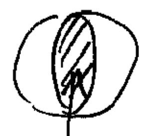
$$= n \cdot \sigma$$

Fläche des Targets (senkrecht zum Strahl)

<u>genauer:</u> $\sigma = \sigma_{tot}$ ist der <u>totale</u> Wirkungsquerschnitt

<u>hier:</u> Streuzentrum = harte Kugel

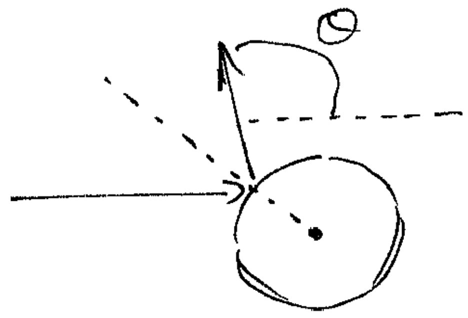
$$\Rightarrow \sigma = \pi R^2$$



Fläche senkrecht zum Strahl

<u>allgemeineres Problem:</u>

Wie viele Teilchen werden in einen Winkelbereich $d\Theta$ gestreut?



$$dN = n \cdot \underbrace{\left[\left(\frac{d\sigma}{d\Theta}\right)(\Theta)\right]} \cdot d\Theta$$

Dies <u>definiert</u> den differentiellen Wirkungsquerschnitt $(d\sigma/d\Theta)$, der natürlich eine Funktion von Θ ist. Er kann aus der Funktion $\Theta = \Theta(b)$ berechnet werden:

$$\Theta = \Theta(b)$$

$$\Theta + d\Theta = \Theta(b) + \frac{d\Theta}{db} \cdot db$$

Teilchen, die Kreis mit Radius b treffen $\rightarrow$ θ

— " — $b+db$ — " — $\rightarrow \theta + d\theta$

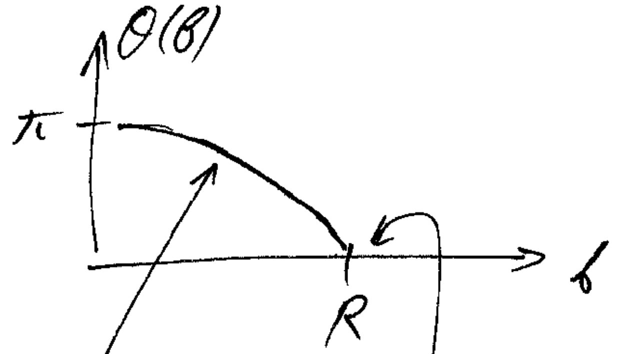
Zahl der in den Zwischenbereich gestreuten Teilchen:

$$dN = n \cdot \underbrace{2\pi b \cdot |db|}_{\text{Fläche des Kreisringes}} = n \cdot 2\pi b \left|\frac{db}{d\theta}\right| \cdot |d\theta|$$

$$dN = n \cdot \underbrace{\frac{2\pi b(\theta)}{|(d\theta/db)|}}_{\equiv \left(\frac{d\sigma}{d\theta}\right)} \cdot d\theta$$

$d\theta$ sei als positiv definiert

hier (harte Kugel):



muß i.A. nicht monoton sein

muß i.A. nicht bei endlichen b Null werden

$$\sigma_{tot} = \int_0^\pi d\theta \cdot \left(\frac{d\sigma}{d\theta}\right) = \int_0^\pi d\theta \, 2\pi b \left|\frac{db}{d\theta}\right|$$

$$= -\int_R^0 2\pi b \, db = \pi R^2$$

σ_{tot} ist nicht definiert ("$=\infty$") falls $\Theta(b)$ nicht bei endlichen b Null wird.

<u>Einschub:</u> Wir können versuchen, $\frac{d\sigma}{d\Theta}$ als wirkliche Ableitung einer Fkt. $\sigma(\Theta)$ zu verstehen:

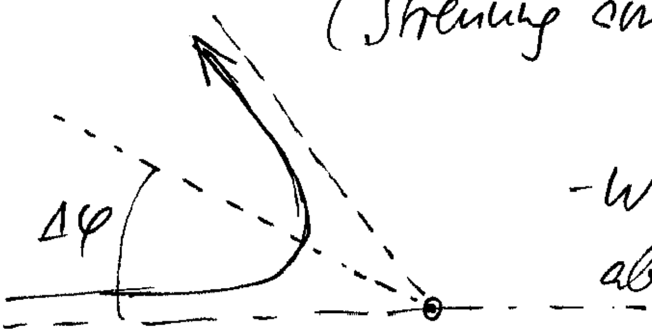
- Wähle $\Theta_0 > 0$
- definiere $\sigma_{\Theta_0}(\Theta) = \int_{\Theta_0}^{\Theta} d\Theta' \left(\frac{d\sigma}{d\Theta}\right)(\Theta')$
- dann ist $n \cdot \sigma_{\Theta_0}(\Theta)$ die Zahl d. Teilchen, die in den Winkelbereich $[\Theta_0, \Theta]$ gestreut werden.
- der naheliegende Limes $\Theta_0 \to 0$ macht Probleme, falls $\int_0^{\pi} (d\sigma/d\Theta) \cdot d\Theta = \sigma_{tot}$ divergiert.
- <u>trotzdem:</u> – Θ_0 kann beliebig klein gewählt werden.
  – $\left(\frac{d\sigma}{d\Theta}\right)$ ist die Ableitung von $\sigma_{\Theta_0}(\Theta)$ und von Θ_0 unabhängig.

<u>harte Kugel:</u> $\sigma(\Theta) = \pi R^2 - \pi b(\Theta)^2 \; (\text{mit } \Theta_0 = 0)$

$$\frac{d\sigma}{d\Theta}(\Theta) = 2\pi b(\Theta) \cdot \left|db/d\Theta\right| \quad \checkmark$$

Berühmtes Beispiel: <u>Rutherford Streuung</u>

(Streuung am Coulomb-Feld)



- wie Kepler-Problem,
aber <u>abstoßende</u> Kraft

$$\Delta\varphi = \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{b\,dr/r^2}{\sqrt{1 - V(r)/E - b^2/r^2}} \quad , \quad V(r) = \frac{\alpha}{r}$$

Rechnung völlig analog zur Bahnform-Berechnung bei 8.1, nur mit anderem Vorzeichen für V.

$$s = 1/r \quad , \quad ds = -dr/r^2$$

$$\Delta\varphi = -\int_{s_{max}}^{s_{min}} \frac{ds}{\sqrt{1/b^2 - \frac{\alpha s}{E b^2} - s^2}}$$

$$= \int_{s_{min}}^{s_{max}} \frac{ds}{\sqrt{-\left(s + \frac{\alpha}{2Eb^2}\right)^2 + \underbrace{\frac{1}{b^2} + \left(\frac{\alpha}{2Eb^2}\right)^2}_{\equiv c^2}}}$$

$$= \int_{u_{min}}^{u_{max}} \frac{du}{\sqrt{c^2 - u^2}} \quad ,$$

$$= -\arccos(u/c)\Big|_{u_{min}}^{u_{max}}$$

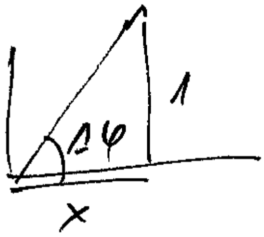
NR: $\arccos(u/c)' = -\frac{1}{\sqrt{1-(u/c)^2}} \cdot \frac{1}{c} = -\frac{1}{\sqrt{c^2-u^2}}$

Mit $u_{min} = \frac{\alpha}{2Eb^2}$

$u_{max} = c$ folgt (wegen $\arccos 1 = 0$)

$$\Delta\varphi = \arccos\left(\frac{\alpha/2Eb^2}{c}\right) = \arccos\left(\frac{\frac{\alpha}{mv^2b^2}}{\sqrt{\frac{1}{b^2}+\left(\frac{\alpha}{mv^2b^2}\right)^2}}\right)$$

$$= \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) \; ; \quad x \equiv \frac{\alpha}{mv^2b}$$



$$\Rightarrow \tan\Delta\varphi = \frac{1}{x}$$

$$\theta = \pi - 2\Delta\varphi = \pi - 2\,\mathrm{atan}\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$d\theta = -2\,\mathrm{atan}'\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\left(-\frac{dx}{x^2}\right) = (-2)\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\cdot\left(-\frac{dx}{x^2}\right)$$

$$= \frac{2dx}{1+x^2} = \frac{2}{1+x^2}\left(-\frac{\alpha}{mv^2b^2}\right)db$$

$$\frac{d\sigma}{d\theta} = 2\pi b\left|\frac{db}{d\theta}\right| = 2\pi b\,\frac{1+x^2}{2}\cdot\frac{mv^2b^2}{\alpha} = \left(\frac{\alpha}{mv^2}\right)^2\cdot\pi\cdot\frac{1+x^2}{x^3}$$

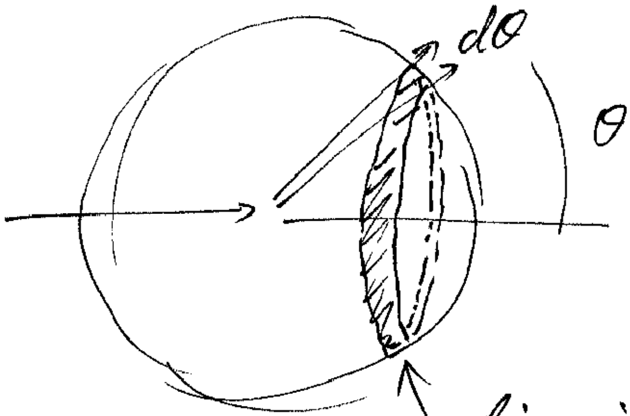
$$\frac{1}{x} = \tan \Delta\varphi = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right) = \cot\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$x = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\frac{1+x^2}{x^3} = \frac{1 + \frac{\sin^2(\theta/2)}{\cos^2(\theta/2)}}{\frac{\sin^3(\theta/2)}{\cos^3(\theta/2)}} = \frac{\cos(\theta/2)}{\sin^3(\theta/2)}$$

also:

$$d\sigma/d\theta = \pi \left(\frac{\alpha}{mv^2}\right)^2 \frac{\cos(\theta/2)}{\sin^3(\theta/2)}$$



dies ist der Raumwinkelbereich,
in den gestreut wird
(= Fläche auf der Einheitskugel)

$$\downarrow$$

$$d\Omega = d\theta \cdot 2\pi \sin\theta$$

$$= d\theta \cdot 4\pi \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{d\sigma/d\Omega = \left(\frac{\alpha}{2mv^2}\right)^2 \frac{1}{\sin^4(\theta/2)}}$$ Rutherford-Formel