

# Theoretische Physik II: Analytische Mechanik und Thermodynamik

Version SS 2024 — Tilman Plehn  
Original von Matthias Bartelmann

27. April 2024

- **Stellen Sie Fragen!**

- Sollten Sie Werbung für die Fachschaft oder anderes studentisches Engagement machen wollen, dann melden Sie sich gerne bei mir.
- Informationen zum Beispiel zur Organisation der Vorlesung und der Übungen gibt es in der Vorlesung.
- Die erste Übung zählt nicht zur Gesamtpunktzahl.
- Die weiteren Aufgaben werden freitags hochgeladen und müssen bis zum kommenden Freitag abgegeben werden, Besprechung am Montag danach.
- Übungsblätter können gerne in Kleingruppen bearbeitet werden. Die Lösungen werden einzeln abgegeben, und müssen in der Übungsgruppe vorgerechnet werden können.
- In den Tutorien werden die Aufgaben immer von Studierenden vorgerechnet, und dann gemeinsam besprochen. Alle Studierenden müssen mindestens einmal vorrechnen.
- Die letzte Vorlesung findet am 11.7. statt.
- Die Woche des 15.7. dient der Klausurvorbereitung (study week).
- 60% der Übungspunkte sind die Voraussetzung für die Klausurzulassung.
- Die beste Vorbereitung für die Klausur sind die Übungsblätter.
- Die Klausur findet am 23.7. nachmittags statt
- Zur Klausur können Sie ein doppelseitig beschriebenes oder bedrucktes DIN-A4-Blatt mitnehmen, weitere Hilfsmittel werden nicht benötigt.
- Es gibt eine Nachklausur am TBA

Herzlichen Dank an viele Studentinnen und Studenten, die das Skript kommentiert und korrigiert haben und damit sehr dazu beigetragen haben, es zu verbessern und verständlicher zu machen!

# Inhaltsverzeichnis

<b>I</b>	<b>Analytische Mechanik</b>	<b>1</b>
<b>1</b>	<b>Harmonische Schwingungen</b>	<b>2</b>
1.1	Harmonischer Oszillator . . . . .	2
1.1.1	Linearisierte Kraft . . . . .	2
1.1.2	Freie Schwingungen . . . . .	3
1.1.3	Komplexe Darstellung . . . . .	4
1.1.4	Hermitesche Matrizen . . . . .	4
1.2	Pendel . . . . .	5
1.2.1	Mathematisches Pendel . . . . .	5
1.2.2	Physikalisches Pendel . . . . .	6
1.2.3	Das Foucaultsche Pendel (Übung) . . . . .	7
1.3	Erzwungene Schwingungen, Resonanz . . . . .	7
1.3.1	Periodischem Antrieb . . . . .	7
1.3.2	Resonanz und Halbwertsbreite . . . . .	8
1.3.3	Lösung mit komplexer Darstellung . . . . .	9
1.3.4	Schwingung nach einem Kraftstoß . . . . .	10
<b>2</b>	<b>Schwingungen gekoppelter Systeme</b>	<b>11</b>
2.1	Parametrisierte Koordinaten . . . . .	11
2.2	Normalkoordinaten . . . . .	14
2.2.1	Transformation auf Normalkoordinaten . . . . .	14
2.2.2	Bestimmung der Normalkoordinaten . . . . .	15
2.2.3	Stabilität . . . . .	16

<i>INHALTSVERZEICHNIS</i>	iii
2.2.4 Gekoppelte Pendel . . . . .	17
<b>3 Systeme mit Nebenbedingungen</b>	<b>18</b>
3.1 Vorbereitung . . . . .	18
3.1.1 Verallgemeinerte Koordinaten . . . . .	18
3.1.2 Lagrange-Multiplikatoren . . . . .	19
3.2 Das d'Alembertsche Prinzip . . . . .	21
3.2.1 Zwangskräfte im Gleichgewicht . . . . .	21

# **Teil I**

## **Analytische Mechanik**

# Kapitel 1

## Harmonische Schwingungen

### 1.1 Harmonischer Oszillator

Bevor wir in diesem Semester Konzepte zur Berechnung komplexer mechanischer Systeme entwickeln, fassen wir noch einmal systematisch zusammen, was wir im vergangenen Semester über den harmonischen Oszillator gelernt haben.

#### 1.1.1 Linearisierte Kraft

- Auf einen Körper im mechanischen *Gleichgewicht* wirkt insgesamt keine Kraft,  $F = 0$ . Bei kleiner Auslenkung aus der Gleichgewichtslage  $x_0$  kann die Kraft getaylornt werden,

$$F = F(x_0) + F'(x_0)(x - x_0) + \dots \approx F'(x_0)(x - x_0) \quad (1.1)$$

Der Einfachheit halber verschieben nehmen wir  $x_0 = 0$  an. Wir *linearisieren* dann die Kraft und erhalten

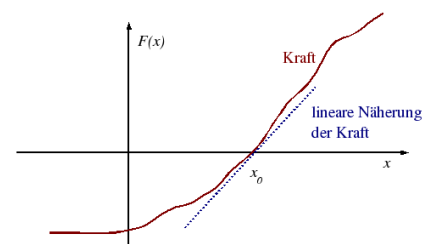
$$F = F'(0) x \quad (1.2)$$

- Das Gleichgewicht ist für  $F'(0) < 0$  stabil. Entsprechend schreiben wir für die *linearisierte* Kraft

$$F'(0) \equiv -k \quad \text{oder} \quad F(x) = -kx, \quad k > 0. \quad (1.3)$$

Die Bewegungsgleichung wird

$$m\ddot{x} = -kx \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad \text{mit} \quad \omega_0 := \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (1.4)$$



Entwicklung der Kraft um die Gleichgewichtslage

### 1.1.2 Freie Schwingungen

- Die Bewegungsgleichung (1.4) ist eine gewöhnliche, lineare, homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Zu ihrer Lösung brauchen wir also ein Fundamentalsystem aus zwei linear unabhängigen Lösungen. Wir sehen sofort das  $x_1(t) = \sin \omega_0 t$  und  $x_2(t) = \cos \omega_0 t$  die Gleichung lösen. Dass sie linear unabhängig voneinander sind sehen wir aus

$$x_1 \dot{x}_2 - x_2 \dot{x}_1 = -\omega_0 \sin^2 \omega_0 t - \omega_0 \cos^2 \omega_0 t = -\omega_0 \neq 0. \quad (1.5)$$

Die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichung ist also

$$x(t) = C_1 \sin(\omega_0 t) + C_2 \cos(\omega_0 t). \quad (1.6)$$

Die Konstanten  $C_1, C_2$  legen wir durch den Anfangsort  $x_0$  und die Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  fest,

$$\begin{aligned} x(t=0) = x_0 &\Rightarrow C_2 = x_0 \\ \dot{x}(t=0) = v_0 &\Rightarrow C_1 = \frac{v_0}{\omega_0} \\ \Rightarrow x(t) &= \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) + x_0 \cos(\omega_0 t). \end{aligned} \quad (1.7)$$

- Mithilfe der Beziehung

$$A_0 \cos(x - y) = A_0 \sin x \sin y + A_0 \cos x \cos y \quad (1.8)$$

lässt sich die allgemeine Lösung auch in die Form

$$x(t) = A_0 \cos(\omega_0 t - \delta_0) \quad (1.9)$$

bringen. Dazu setzt man  $x = \omega_0 t$  sowie  $A_0 \cos y = x_0$  und  $A_0 \sin y = v_0/\omega_0$  und erhält

$$A_0 = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}} \quad (1.10)$$

und

$$\tan \delta_0 = \frac{v_0}{x_0 \omega_0}. \quad (1.11)$$

$A_0 \geq 0$  heißt Amplitude,  $\omega_0 t - \delta_0$  Phase der Schwingung. Dabei ist  $0 \leq \delta_0 < 2\pi$ .

- Die durch (1.9) bzw. (1.10) beschriebene Bewegung heißt *harmonische Schwingung*. Sie hat die *Kreisfrequenz*  $\omega_0$ , die *Frequenz*  $\nu_0$ , und die *Schwingungsperiode*  $T$ ,

$$\nu_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} \Rightarrow T = \frac{1}{\nu_0} = \frac{2\pi}{\omega_0}. \quad (1.12)$$

### 1.1.3 Komplexe Darstellung

- Wir können zur Beschreibung des harmonischen Oszillators komplexe Zahlen nutzen,  $x \rightarrow z$ , indem wir die Bewegungsgleichung (1.4) mit  $2\dot{z}$  als integrierendem Faktor multiplizieren,

$$2\dot{z}\ddot{z} + 2\omega_0^2\dot{z}z = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d(\dot{z}^2)}{dt} = -\omega_0^2 \frac{d(z^2)}{dt} . \quad (1.13)$$

Jetzt kann sie integriert werden und ergibt modulo einer Konstanten, die wir zunächst vernachlässigen

$$\dot{z}^2 = -\omega_0^2 z^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\dot{z}}{z} = \pm i\omega_0 \quad \Leftrightarrow \quad z = e^{\pm i\omega_0 t} . \quad (1.14)$$

- Diese beiden Lösungen sind linear unabhängig, denn

$$\left| -i\omega_0 e^{i\omega_0 t} e^{-i\omega_0 t} - i\omega_0 e^{-i\omega_0 t} e^{i\omega_0 t} \right| = 2\omega_0 \neq 0 . \quad (1.15)$$

Eine komplexe Lösung hat keinen physikalisch offensichtlichen Sinn, so dass man für eine physikalische Aussage ihre Real- oder Imaginärteile wählt.

### 1.1.4 Hermitesche Matrizen

- Diese einführende Diskussion führt und zur komplexen Erweiterung der symmetrischen Matrizen. Wenn man alle Elemente einer Matrix  $a_{ij} \in \mathbb{C}$  komplex konjugiert,  $A^* = (a_{ij}^*)$ , und sie zusätzlich transponiert, heißt sie adjungiert,

$$A^\dagger = (A^*)^T = (a_{ji}^*) . \quad (1.16)$$

Matrizen, die gleich ihren Adjungierten sind,

$$A = A^\dagger , \quad (1.17)$$

- Seien nun  $A$  eine hermitesche Matrix,  $\lambda_i$  und  $\lambda_j$  zwei ihrer Eigenwerte und  $v_i$  und  $v_j$  die zugehörigen Eigenvektoren, also

$$Av_i = \lambda_i v_i \quad \text{und} \quad Av_j = \lambda_j v_j . \quad (1.18)$$

Durch Multiplikation der ersten Gleichung mit  $v_j^\dagger$  und der zweiten mit  $v_i^\dagger$  erhalten wir

$$\begin{aligned} v_j^\dagger Av_i &= v_j^\dagger \lambda_i v_i = \lambda_i \langle v_j, v_i \rangle \\ \text{und} \quad v_i^\dagger Av_j &= v_i^\dagger \lambda_j v_j = \lambda_j \langle v_i, v_j \rangle , \end{aligned} \quad (1.19)$$

denn das Skalarprodukt zweier komplexwertiger Vektoren ist

$$\langle v, w \rangle = v^\dagger \cdot w = (w^\dagger \cdot v)^\dagger \equiv (w^\dagger \cdot v)^* = \langle w, v \rangle^* . \quad (1.20)$$



Diese Form garantiert  $\langle v, v \rangle \geq 0$ . Die adjungierte zweite Gleichung in (1.19) wird dann

$$v_j^\dagger A^\dagger v_i = v_j^\dagger A v_i = \lambda_j^* \langle v_i, v_j \rangle^* = \lambda_j^* \langle v_j, v_i \rangle \quad \text{mit} \quad A^\dagger = A. \quad (1.21)$$

Subtrahieren wir sie von der ersten Gleichung in (1.19), folgt

$$0 = (\lambda_i - \lambda_j^*) \langle v_j, v_i \rangle. \quad (1.22)$$

Für  $i = j$  folgt wegen  $\langle v_i, v_i \rangle > 0$  damit  $\lambda_i = \lambda_i^*$ , die Eigenwerte sind *reell*. Für  $i \neq j$  sieht man, dass Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten hermitescher Matrizen *orthogonal* sein müssen.

- Schließlich sei noch erwähnt, dass unitäre Matrizen  $U$  solche sind, deren Adjungierte gleich ihren Inversen sind,

$$U^\dagger = U^{-1}. \quad (1.23)$$

Sie verallgemeinern die Beziehung  $R^T = R^{-1}$  orthogonaler Matrizen.

## 1.2 Pendel

In einigen Beispielen zeigen wir, wie sich auch kompliziertere Schwingungen mit Hilfe der komplexen Zahlen lösen lassen. Das bedeutet nicht, dass man nicht auch mit den üblichen trigonometrischen Funktionen zum Erfolg kommt, aber diese Rechnung wäre komplizierter.

### 1.2.1 Mathematisches Pendel

- Ein Massenpunkt der Masse  $M$  sei im homogenen Gravitationsfeld an einem masselosen Faden der Länge  $l$  aufgehängt. Das Pendel bewege sich in der  $x$ - $y$ -Ebene. Für einen kleinen Auslenkwinkel  $\phi$  aus der Ruhelage zeigt der Faden in die Richtung

$$\begin{aligned} \vec{x} &= l (\sin \phi \vec{e}_x - \cos \phi \vec{e}_y) \approx -l \vec{e}_y \\ \Rightarrow \dot{\vec{x}} &= l \dot{\phi} (\cos \phi \vec{e}_x + \sin \phi \vec{e}_y) \approx l \dot{\phi} \vec{e}_x \\ \Rightarrow \ddot{\vec{x}} &= l \ddot{\phi} (\cos \phi \vec{e}_x + \sin \phi \vec{e}_y) + l \dot{\phi}^2 (-\sin \phi \vec{e}_x + \cos \phi \vec{e}_y) \\ &\approx l \ddot{\phi} \vec{e}_x + l \dot{\phi}^2 \vec{e}_y. \end{aligned} \quad (1.24)$$

Die Gravitationskraft zeigt immer nach unten,

$$\vec{F} = -Mg \vec{e}_y, \quad (1.25)$$

wobei  $g$  die Schwerebeschleunigung ist. Senkrecht zum Pendel wirkt also die Rückstellkraft

$$\begin{aligned}\vec{F}_r &= \vec{F} - (\vec{F} \cdot \hat{x}) \hat{x} \\ &= -Mg\vec{e}_y - Mg \cos \phi (\sin \phi \vec{e}_x - \cos \phi \vec{e}_y) \\ &= -\sin^2 \phi Mg\vec{e}_y - Mg \cos \phi \sin \phi \vec{e}_x \approx -Mg\phi \vec{e}_x .\end{aligned}\quad (1.26)$$

Mit dieser Kraft ist der führende Term der Bewegungsgleichung

$$-Mg\phi \vec{e}_x = Ml\ddot{\phi} \vec{e}_x \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{\phi} + \frac{g}{l}\phi = 0 .\quad (1.27)$$

Das ist offensichtlich eine harmonische Oszillorgleichung für  $\phi$ . Die Schwingungsfrequenz  $\omega = \sqrt{g/l}$  ist unabhängig von der Masse  $M$  des Pendelkörpers.

## 1.2.2 Physikalisches Pendel

- Nun ersetzen wir den Massenpunkt durch eine homogene Scheibe der Masse  $M$ , Dicke  $d$  und Radius  $R$ , die in ihrem Schwerpunkt an einer Pendelstange der Länge  $l$  fixiert wird und rotiert. Ändert sich dadurch das Verhalten des Pendels?
- Für die Bewegungsgleichung benötigen wir das Trägheitsmoment des Pendels. In Zylinderkoordinaten, in denen  $\hat{z}$  senkrecht zur Scheibe steht und der Ursprung im Scheibenmittelpunkt liegt, ist das Hauptträgheitsmoment  $\Theta_{33}$  der Scheibe

$$\begin{aligned}\Theta_{33} &= \int_0^R r dr \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-d/2}^{d/2} dz \rho (\vec{x}^2 \delta_{33} - z^2) \\ &= \rho \int_0^R r dr \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-d/2}^{d/2} dz ((r^2 + z^2) - z^2) \\ &= \rho \int_0^R r^3 dr \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-d/2}^{d/2} dz \\ &= \rho \frac{R^4}{4} 2\pi d = \frac{MR^2}{2} \quad \text{mit } M = \rho\pi R^2 d .\end{aligned}\quad (1.28)$$

Das gesamte Trägheitsmoment des Pendels ist damit

$$\Theta = \frac{MR^2}{2} + Ml^2 .\quad (1.29)$$

Die Drehimpulsänderung in die  $z$ -Richtung ist dann

$$\dot{L} = \Theta \dot{\omega} = \Theta \ddot{\phi} \vec{e}_z = M \left( \frac{R^2}{2} + l^2 \right) \ddot{\phi} \vec{e}_z .\quad (1.30)$$

- Das antreibende Drehmoment der Gravitation am Schwerpunkt ist

$$\begin{aligned} \vec{M} &= \vec{F} \times \vec{x} \\ &= \vec{F} \times l\hat{x} = -Mg\vec{e}_y \times l \sin \phi \vec{e}_x \\ &\approx Mgl\phi(\vec{e}_y \times \vec{e}_x) = -Mgl\phi\vec{e}_z. \end{aligned} \quad (1.31)$$

woraus für die Bewegungsgleichung  $\vec{M} = \dot{\vec{L}}$  in einer Dimension

$$\left(\frac{R^2}{2} + l^2\right)\ddot{\phi} + gl\phi = 0 \quad (1.32)$$

folgt. Das relative Vorzeichen entspricht der Bedingung, dass das Gleichgewicht stabil ist. Die Schwingungsfrequenz

$$\omega = \sqrt{\frac{2gl}{R^2 + 2l^2}}. \quad (1.33)$$

hängt nach wie vor nicht von der Pendelmasse ab, wird aber mit zunehmendem Scheibenradius kleiner. Für  $R \rightarrow 0$  bekommen wir das Ergebnis für das mathematische Pendel, (1.27).

### 1.2.3 Das Foucaultsche Pendel (Übung)

## 1.3 Erzwungene Schwingungen, Resonanz

### 1.3.1 Periodischem Antrieb

- Auf den Massenpunkt mit einer allgemeinen Bewegungsgleichung wirke nun eine periodische Kraft  $F_e = c \cos(\omega t)$ ,

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = c \cos(\omega t) \quad (1.34)$$

wird. Wir lösen die Gleichung wieder in der komplexen Ebene,

$$m\ddot{z} + b\dot{z} + kz = c e^{i\omega t} \quad (1.35)$$

mit  $z(t) \in \mathbb{C}$ , wobei die physikalische Lösung der Realteil der komplexen Lösung sein wird.

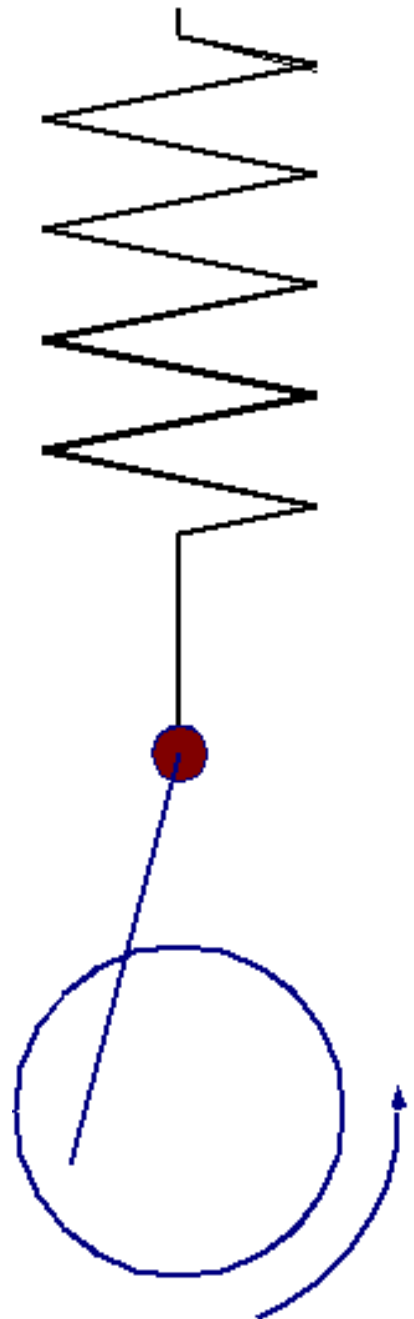
...(Übung mit Ansatz für spezielle Lösung)...

Die allgemeine Lösung für die erzwungene Schwingung ist

$$x(t) = A \cos(\omega t - \delta) + \bar{A}e^{-\lambda t} \cos(\bar{\omega}t - \bar{\delta}), \quad (1.36)$$

mit der Amplitude und Phase

$$A = \frac{c/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\lambda^2}} > 0 \quad \tan \delta = \frac{2\omega\lambda}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (1.37)$$



erzwungene Schwingung: Federpendel mit periodischem Antrieb

und

$$\lambda = \frac{b}{2m} \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad \bar{\omega} = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}, \quad (1.38)$$

falls  $\lambda < \omega_0$  ist.  $\bar{A}$  und  $\bar{\delta}$  stehen noch zur Erfüllung der Anfangsbedingungen zur Verfügung.

- Für lange Zeiten  $t \gg 1/\lambda$  verschwindet der zweite Term mit seiner exponentiellen Dämpfung. Nach einer *Einschwingung* schwingt der Oszillator dann mit derselben Frequenz wie die äußere Kraft, aber um die Phase  $\delta$  verschoben.

### 1.3.2 Resonanz und Halbwertsbreite

- Die Amplitude  $A$  aus (1.37) zeigt das typische *Resonanzverhalten*. Nach der Kettenregel erreicht sie ein Maximum bei

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{d\omega} \left( (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\lambda^2 \right) = 2(\omega_0^2 - \omega^2)(-2\omega) + 8\omega\lambda^2 \\ &= 4\omega \left( -\omega_0^2 + \omega^2 + 2\lambda^2 \right) \end{aligned} \quad (1.39)$$

$$\text{oder } \omega_{\max} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2} \approx \omega_0 \left( 1 - \frac{\lambda^2}{\omega_0^2} + \mathcal{O}\left(\frac{\lambda^3}{\omega_0^3}\right) \right),$$

wenn wir für schwache Dämpfung taylorln,  $\lambda \ll \omega_0$ . Ohne Dämpfung ist die Resonanzfrequenz identisch mit der Frequenz des freien Pendels, bei kleiner Dämpfung beginnen sich die beiden zu unterscheiden. Das Maximum erreicht die Höhe

$$A_{\max} = \frac{c/m}{\sqrt{(2\lambda^2)^2 + 4(\omega_0^2 - 2\lambda^2)\lambda^2}} = \frac{c/m}{2\lambda\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}}. \quad (1.40)$$

- Die Halbwertsbreite der Intensität ist durch die Bedingung

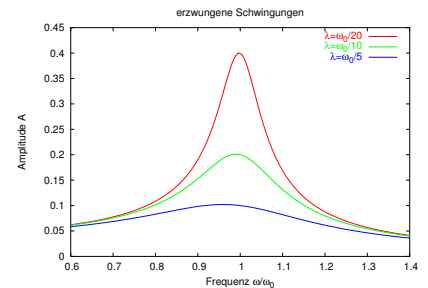
$$A^2(\omega_{1,2}) = \frac{1}{2} A_{\max}^2 \quad (1.41)$$

definiert. Sie führt zur Bedingung

$$\begin{aligned} \frac{c^2/m^2}{(\omega_0^2 - \omega_{1,2}^2)^2 + 4\omega_{1,2}^2\lambda^2} &= \frac{c^2/m^2}{8\lambda^2(\omega_0^2 - \lambda^2)} \\ \Leftrightarrow \omega_0^4 - 2\omega_0^2\omega_{1,2}^2 + \omega_{1,2}^4 + 4\omega_{1,2}^2\lambda^2 &= 8\lambda^2\omega_0^2 - 8\lambda^4 \\ \Leftrightarrow \omega_{1,2}^4 - 2\omega_{1,2}^2\omega_{\max}^2 + \omega_0^4 - 8\lambda^2\omega_0^2 + 8\lambda^4 &= 0, \end{aligned} \quad (1.42)$$

mit der Lösung

$$\begin{aligned} \omega_{1,2}^2 &= \omega_{\max}^2 \pm \sqrt{\omega_{\max}^4 - \omega_0^4 + 8\lambda^2\omega_0^2 - 8\lambda^4} \\ &= \omega_{\max}^2 \pm \sqrt{6\lambda^2\omega_0^2 - 4\lambda^4} \\ &\approx \omega_0^2 \left( 1 \pm \frac{\sqrt{6}\lambda}{\omega_0} \right) \left( 1 + \mathcal{O}\left(\frac{\lambda^2}{\omega_0^2}\right) \right) \end{aligned} \quad (1.43)$$



Resonanzverhalten der Amplitude erzwungener Schwingungen

oder

$$\omega_{1,2} \approx \omega_0 \left( 1 \pm \frac{\sqrt{3}\lambda}{\sqrt{2}\omega_0} \right) = \omega_0 \pm \frac{\sqrt{3}\lambda}{\sqrt{2}}. \quad (1.44)$$

Die komplette Halbwertsbreite für schwache Dämpfung ist damit

$$\Gamma = \sqrt{6}\lambda. \quad (1.45)$$

### 1.3.3 Lösung mit komplexer Darstellung

- Für getriebene Schwingungen haben wir die spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung durch einen Ansatz erraten. Es gibt aber ein allgemeines Konstruktionsverfahren, bei dem wir von der ungedämpften Gleichung ausgehen,

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \omega_0^2 x &= \frac{F(t)}{m} \\ \Leftrightarrow \frac{d}{dt} (\dot{x} + i\omega_0 x) - i\omega_0 (\dot{x} + i\omega_0 x) &= \frac{F(t)}{m}. \end{aligned} \quad (1.46)$$

Mit  $\xi(t) = \dot{x}(t) + i\omega_0 x(t)$  reduziert sich die Bewegungsgleichung auf eine Differentialgleichung erster Ordnung,

$$\dot{\xi} - i\omega_0 \xi = \frac{F(t)}{m}. \quad (1.47)$$

Da  $x(t)$  reell sein muss, folgt am Ende  $x(t) = \Im(\xi(t))/\omega_0$ .

- Die homogene Gleichung hat die allgemeine Lösung

$$\dot{\xi} = i\omega_0 \xi \quad \Rightarrow \quad \xi(t) = A e^{i\omega_0 t} + \xi_0. \quad (1.48)$$

Durch Variation der Konstanten,

$$A \rightarrow A(t) \quad \Rightarrow \quad \dot{\xi}(t) = (\dot{A} + i\omega_0 A) e^{i\omega_0 t}, \quad (1.49)$$

erhalten wir die Lösung der inhomogenen Bewegungsgleichung

$$\begin{aligned} (\dot{A} + iA\omega_0) e^{i\omega_0 t} - i\omega_0 A e^{i\omega_0 t} &= \dot{A} e^{i\omega_0 t} = \frac{F(t)}{m} \\ \Rightarrow A(t) &= \int_0^t \frac{F(t')}{m} e^{-i\omega_0 t'} dt' \\ \Rightarrow \xi(t) &= e^{i\omega_0 t} \int_0^t \frac{F(t')}{m} e^{-i\omega_0 t'} dt' + \xi_0. \end{aligned} \quad (1.50)$$

### 1.3.4 Schwingung nach einem Kraftstoß

- Als letztes Beispiel betrachten wir eine Kraft, die zwischen den Zeiten  $t = 0$  und  $t = \tau$  den konstanten Betrag  $F_0$  hat und sonst verschwindet. Nach (1.50) ist dann

$$\xi(t) = \xi_0 + e^{i\omega_0 t} \left( \int_0^\tau + \int_\tau^t \right) \frac{F(t')}{m} e^{-i\omega_0 t'} dt' . \quad (1.51)$$

mit der Lösung

$$\xi(t) = \xi_0 + e^{i\omega_0 t} \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{iF_0}{m\omega_0} (e^{-i\omega_0 t} - 1) & t = 0 \dots \tau \\ \frac{iF_0}{m\omega_0} (e^{-i\omega_0 \tau} - 1) & t > \tau \end{cases} . \quad (1.52)$$

- Wenn wir verlangen, dass der Oszillator anfangs in Ruhe ist, also  $\dot{x} = 0 = \dot{x}$  für  $t < 0$ , dann ist  $\xi_0 = 0$  und

$$\xi(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{iF_0}{m\omega_0} (1 - e^{i\omega_0 t}) & t = 0 \dots \tau \\ \frac{iF_0}{m\omega_0} (e^{i\omega_0(t-\tau)} - e^{i\omega_0 t}) & t \geq \tau \end{cases} . \quad (1.53)$$

Die physikalische Lösung ist dann

$$x(t) = \frac{\Im \xi(t)}{\omega_0} = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{F_0}{m\omega_0^2} (1 - \cos \omega_0 t) & t = 0 \dots \tau \\ \frac{F_0}{m\omega_0^2} (\cos \omega_0(t - \tau) - \cos \omega_0 t) & t > \tau . \end{cases} \quad (1.54)$$

# Kapitel 2

## Schwingungen gekoppelter Systeme

Bislang haben wir uns physikalisch vor allem mit der Bewegung punktförmiger Körper in Raum und Zeit befasst. Die formale Grundlage waren Newtons Axiome. Als alternativen Weg zur Beschreibung eines sich bewegenden Teilchens haben wir Erhaltungssätze genutzt. Zum Beispiel haben wir Energieerhaltung aus der Newtonschen Mechanik mit Hilfe eines integrierenden Faktors abgeleitet. Zwei Aspekte haben wir nicht wirklich zufriedenstellend behandeln können: allgemeine Nebenbedingungen und Systeme mit mehr als einem Teilchen. Hier benötigen wir einen Formalismus, der die Newtonschen Axiome ersetzt.

### 2.1 Parametrisierte Koordinaten

Bei der Diskussion des Pendels haben wir die Koordinaten  $\vec{x}$  durch einen Winkel  $\phi$  ausgedrückt, wenn sich der Massenpunkt auf einer Kreislinie in einer Ebene bewegt. Dadurch wird die Anzahl der Freiheitsgrade von allgemein drei auf einen relevanten Freiheitsgrad reduziert. Ein weiteres Beispiel sind zwei Pendel, die durch eine Stange zwischen ihren beiden Massen verbunden sind. Die Kopplung zwischen den Pendeln reduziert die sechs Freiheitsgrade ebenfalls auf einen. Die Frage ist, wie man diese Reduktion auf die kleinste Zahl notwendiger Freiheitsgrade formalisieren kann.

- Wir betrachten  $N$  Massenpunkte mit  $3N$  Freiheitsgraden, die aneinander gekoppelt sind, so dass  $f$  Freiheitsgrade bleiben. Zur Beschreibung der Bewegung brauchen wir  $f$  Parameter  $q_k(t)$ , von

denen die Raumkoordinaten  $x_j(t)$  abhängen,

$$x_j = x_j[q_k(t)] \quad \Rightarrow \quad \dot{x}_j = \frac{\partial x_j}{\partial q_k} \dot{q}_k \quad (2.1)$$

Wir können auch umgekehrt  $q_k$  durch die  $x_j$  darstellen,

$$\dot{q}_k = \frac{\partial q_k}{\partial x_j} \dot{x}_j \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \dot{x}_j} = \frac{\partial q_k}{\partial x_j}. \quad (2.2)$$

- Damit können wir die kinetische Energie eines Massenpunkts  $m^{(i)}$  am Ort  $\vec{x}$  durch die  $q_k$  auszudrücken,

$$T^{(i)} = \frac{m^{(i)}}{2} \dot{\vec{x}}^2 = \frac{m^{(i)}}{2} \left( \frac{\partial x_j}{\partial q_k} \dot{q}_k \right) \left( \frac{\partial x_j}{\partial q_\ell} \dot{q}_\ell \right) = \frac{m^{(i)}}{2} \frac{\partial x_j}{\partial q_k} \frac{\partial x_j}{\partial q_\ell} \dot{q}_k \dot{q}_\ell, \quad (2.3)$$

mit  $k, \ell = 1, \dots, f$  und für einen Massenpunkt  $j = 1, \dots, 3$ . Für die gesamte kinetische Energie nutzen wir wieder den kompletten Vektor  $x_j$  mit  $j = 1, \dots, 3N$  und erhalten

$$T(\vec{q}) = \left( \sum_{j, (i(j))} \frac{m^{(i)}}{2} \frac{\partial x_j}{\partial q_k} \frac{\partial x_j}{\partial q_\ell} \right) \dot{q}_k \dot{q}_\ell. \quad (2.4)$$

Wir werten  $m^{(i)}$  zusammen mit  $j$  so aus, dass die Masse zu den Koordinaten des entsprechenden Massenpunktes passt.

- Nach dem zweiten Newtonschen Axiom ist die Bewegungsgleichung des Massenpunktes  $m^{(i)}$  in einem konservativen Kraftfeld

$$m^{(i)} \ddot{x}_j = - \frac{\partial V(\vec{x})}{\partial x_j}. \quad (2.5)$$

Mithilfe der kinetischen Energie des Massenpunktes lässt sich diese Bewegungsgleichung umschreiben,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T^{(i)}}{\partial \dot{x}_j} = \frac{d}{dt} \frac{m^{(i)}}{2} \frac{\partial \dot{x}_j^2}{\partial \dot{x}_j} = \frac{d}{dt} m^{(i)} \dot{x}_j = - \frac{\partial V(\vec{x})}{\partial x_j}. \quad (2.6)$$

Wenn wir hier die Parameter  $q_k$  einführen, dann erhalten wir

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T^{(i)}(\vec{q})}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \dot{x}_j} \right) = - \frac{\partial V(\vec{q})}{\partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial x_j}. \quad (2.7)$$

Wir setzen nun voraus, dass  $\partial q_j / \partial x_k$  zeitunabhängig ist und erhalten mit (2.2)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T^{(i)}}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \dot{x}_j} \right) &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T^{(i)}}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial q_k}{\partial x_j} \right) \\ &= \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial T^{(i)}}{\partial \dot{q}_k} \right) \frac{\partial q_k}{\partial x_j} = - \frac{\partial V(\vec{q})}{\partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial x_j}. \end{aligned} \quad (2.8)$$



Das ist allgemein nur möglich ist wenn

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T^{(i)}(\dot{\vec{q}})}{\partial \dot{q}_k} = - \frac{\partial V(\vec{q})}{\partial q_k} . \quad (2.9)$$

Diese Bewegungsgleichungen für die Parameter  $q_k$  entspricht also (2.6), wenn die entsprechende Transformation zeitunabhängig ist.

- Im Gleichgewicht dürfen sich die  $q_k$  nicht ändern,  $\dot{q}_k = 0$ . Da die kinetische Energie  $T$  nach (2.4) eine quadratische Form in den verallgemeinerten Geschwindigkeiten  $\dot{q}_k$  ist, ist im Gleichgewicht auch

$$\frac{\partial T^{(i)}}{\partial \dot{q}_k} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T^{(i)}(\dot{\vec{q}})}{\partial \dot{q}_k} = - \frac{\partial V(\vec{q})}{\partial q_k} = 0 . \quad (2.10)$$

Die verallgemeinerte Kraft verschwindet also im Gleichgewicht,

$$Q_k := - \frac{\partial V}{\partial q_k} . \quad (2.11)$$

- Wir definieren jetzt den Ursprung  $q_k = 0$  als Gleichgewichtslage und taylor die potentielle Energie bis zur 2. Ordnung in  $q_k$ ,

$$\begin{aligned} V(\vec{q}) &= V \Big|_{q=0} + \sum_{k=1}^f \frac{\partial V}{\partial q_k} \Big|_{q=0} q_k + \frac{1}{2} \sum_{k,\ell=1}^f \frac{\partial^2 V}{\partial q_k \partial q_\ell} \Big|_{q=0} q_k q_\ell + \mathcal{O}(q^3) \\ &=: \frac{1}{2} \sum_{k,\ell=1}^f V_{k\ell} q_k q_\ell + \mathcal{O}(q^3) , \end{aligned} \quad (2.12)$$

Analog wird die kinetische Energie nahe der Gleichgewichtslage

$$T(\dot{\vec{q}}) = \frac{1}{2} \sum_{k,\ell=1}^f \sum_{j,i(j)} m^{(i)} \left( \frac{\partial x_j}{\partial q_k} \frac{\partial x_j}{\partial q_\ell} \right) \dot{q}_k \dot{q}_\ell =: \frac{1}{2} \sum_{k,\ell=1}^f T_{k,\ell} \dot{q}_k \dot{q}_\ell . \quad (2.13)$$

- Die quadratischen Formen  $T$  und  $V$  können durch symmetrische  $(f \times f)$ -Matrizen ausgedrückt werden. Für beliebige  $\dot{\vec{q}}$  ist

$$\dot{\vec{q}}^T T \dot{\vec{q}} = \sum_{j,i(j)} m^{(i)} \frac{\partial \vec{x}_j}{\partial q_k} \dot{q}_k \frac{\partial \vec{x}_j}{\partial q_\ell} \dot{q}_\ell \geq 0 . \quad (2.14)$$

Die kinetische Energie kann nicht negativ werden,  $T$  ist eine positiv-semidefinite Matrix. Wir nehmen im folgenden an, dass  $T$  positiv definit ist. Aus (2.9) folgen dann wieder unter der Bedingung dass die Relation der Koordinaten zeitlich konstant ist,

$$\frac{d}{dt} T \dot{\vec{q}} = -V \vec{q} \quad \Rightarrow \quad T \ddot{\vec{q}} + V \vec{q} = 0 , \quad (2.15)$$

Diese Bewegungsgleichungen sind eine Verallgemeinerung der harmonischen Schwingungsgleichung im  $x$ -Raum.

## 2.2 Normalkoordinaten

Wir können also Systeme mit  $N$  Massenpunkten und komplizierten Nebenbedingungen durch parametrisierte Koordinaten  $\vec{q}$  beschreiben, in denen man die kinetische und potentielle Energie genau wie in Ortskoordinaten schreiben kann. Nachdem wir Matrizen diagonalisieren können stellt sich die Frage, ob man auch die quadratischen Formen  $T$  oder  $V$  durch eine geeignete Koordinatenwahl vereinfachen kann.

### 2.2.1 Transformation auf Normalkoordinaten

- Da  $T$  positiv definit ist, gibt es eine Matrix  $B$ , so dass

$$T = B^T B \quad (2.16)$$

gilt. Zum Beweis benutzen wir, dass sich  $T$  diagonalisieren lässt. Seien  $t_1, \dots, t_f$  die Eigenwerte, dann gibt es eine orthogonale Koordinatentransformation  $R$ , so dass

$$\begin{aligned} T &= R^T \text{diag}(t_k) R \\ &= R^T \text{diag}(\sqrt{t_k}) \text{diag}(\sqrt{t_k}) R \quad (T \text{ positiv definit}) \\ &=: B^T B. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Dabei ist  $B$  nur bis auf eine orthogonale Transformation  $S$  festgelegt, denn

$$(SB)^T SB = B^T (S^T S) B = B^T B = T. \quad (2.18)$$

Wir nutzen diese Form von  $T$  und transformieren die kinetische Energie

$$T = \frac{1}{2} \dot{\vec{q}}^T T \dot{\vec{q}} = \frac{1}{2} \dot{\vec{q}}^T B^T B \dot{\vec{q}} = \frac{1}{2} \dot{\xi}^T \dot{\xi} \quad \text{mit} \quad \dot{\xi} := B \dot{\vec{q}}. \quad (2.19)$$

- Für die potentiellen Energie invertieren wir zunächst  $B$ ,

$$\vec{q} =: \bar{B} \xi \quad \Rightarrow \quad V = \frac{1}{2} \vec{q}^T V \vec{q} = \frac{1}{2} \xi^T \bar{B}^T V \bar{B} \xi. \quad (2.20)$$

Um diese Form zu vereinfachen, können wir nach (2.18)  $B$  von links mit einer orthogonalen Matrix  $S$  multiplizieren,

$$\bar{B} = (SB')^{-1} \equiv \bar{B}' S^T. \quad (2.21)$$

Der Ausdruck für die kinetischen Energie ändert sich nicht, aber wir erhalten jetzt für die potentielle Energie

$$V = \frac{1}{2} \xi^T S \left[ (\bar{B}')^T V \bar{B}' \right] S^T \xi. \quad (2.22)$$

Mit einer geeigneten Wahl von  $S$  und den zu berechnenden Eigenwerten  $\lambda_k$  wird die potentielle Energie

$$V = \frac{1}{2} \xi^T \text{diag}(\lambda_k) \xi. \quad (2.23)$$

- Die kinetische und die potentielle Energie lassen sich also als

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^f \dot{\xi}_k^2 \quad \text{und} \quad V = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^f \lambda_k \xi_k^2 \quad (2.24)$$

schreiben. Die Bewegungsgleichungen lauten dann

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}_k} + \frac{\partial V}{\partial \xi_k} = \frac{d}{dt} \dot{\xi}_k + \lambda_k \xi_k = \ddot{\xi}_k + \lambda_k \xi_k = 0 \quad (2.25)$$

für alle  $k = 1, \dots, f$ . In den Parametern  $\xi_k$  *entkoppeln* also die Bewegungsgleichungen und beschreiben  $f$  *unabhängige* harmonische Oszillatoren. Die  $\xi_k$  heißen *Normalkoordinaten*.

## 2.2.2 Bestimmung der Normalkoordinaten

- Normalkoordinaten sind nur hilfreich, wenn wir sie für ein gegebenes System auch konstruieren können. Zunächst bestimmen wir nach Gleichung (2.20) die Eigenwerte  $\lambda_k$  über das charakteristische Polynom von  $\bar{B}^T V \bar{B}$ ,

$$\begin{aligned} \det(\bar{B}^T V \bar{B} - \lambda) &= 0 \\ \Leftrightarrow \det\left[B^T (\bar{B}^T V \bar{B} - \lambda) B\right] &= 0 \\ \Leftrightarrow \det(V - \lambda T) &= 0 \end{aligned} \quad (2.26)$$

Man sagt die  $\lambda_k$  sind auch die Eigenwerte von  $V$  *bezüglich*  $T$ ,

$$\begin{aligned} \bar{B}^T V \bar{B} &= \text{diag}(\lambda_k) \\ \Leftrightarrow V \bar{B} &= B^T \text{diag}(\lambda_k) \\ &= B^T (B \bar{B}) \text{diag}(\lambda_k) = T \bar{B} \text{diag}(\lambda_k). \end{aligned} \quad (2.27)$$

- Um die Eigenvektoren zu den Eigenwerten  $\lambda_k$  zu erhalten zerlegen wir die Matrix  $\bar{B}$  in Spaltenvektoren  $\vec{b}_k$ ,

$$\bar{B} = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_f) \quad (2.28)$$

und erhalten damit aus (2.27) die Eigenwertgleichung

$$V \vec{b}_k = \lambda_k T \vec{b}_k, \quad (2.29)$$

in der also  $T$  an die Stelle der Einheitsmatrix tritt.

- Die bekannten Sätze zum Eigenwertproblem sind vollständig übertragbar, indem  $T$  als metrischer Tensor die Rolle der Einheitsmatrix übernimmt. Zum Beispiel sind die  $\vec{b}_k$  orthonormal bezüglich  $T$ , denn

$$\bar{B}^T T \bar{B} = \bar{B}^T B^T B \bar{B} = 1 \quad \Rightarrow \quad \vec{b}_k^T T \vec{b}_\ell = \delta_{k\ell}. \quad (2.30)$$

Daraus ergibt sich folgende Vorschrift für die Konstruktion der Matrix  $\bar{B}$  und für die Transformation auf Normalkoordinaten  $\vec{\xi}$ :

1. Zunächst das Eigenwertproblem  $(V - \lambda T)\vec{b} = 0$  lösen und ein vollständiges, bezüglich  $T$  orthonormales System von Eigenvektoren  $\vec{b}_k$  bestimmen,
2. danach mittels

$$\vec{q} = \sum_{k=1}^f \vec{b}_k \xi_k = \overline{B}\vec{\xi} \quad (2.31)$$

auf Normalkoordinaten transformieren.

### 2.2.3 Stabilität

- Die Lösungen der Bewegungsgleichungen (2.25) ist

$$\xi_k \propto e^{\pm i \sqrt{\lambda_k} t} . \quad (2.32)$$

Wir können also zwei Fälle unterscheiden:

1. Alle  $\lambda_k > 0$ , also  $\lambda_k =: \omega_k^2$ , dann sind die Lösungen harmonische Schwingungen,

$$\xi_k(t) = C_k \cos(\omega_k t - \delta_k) . \quad (2.33)$$

Das System ist genau dann stabil, wenn  $V$  strikt positiv ist, die Potentialfunktion in der Ruhelage also ein Minimum hat.

2. Mindestens ein  $\lambda_k \leq 0$ , dann kann  $\xi_k$  im Rahmen der betrachteten Näherung unbegrenzt wachsen und das System ist instabil.

- Im stabilen Fall ist die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichung für das Gesamtsystem nach (2.31) und (2.33)

$$\vec{q}(t) = \sum_{k=1}^f \vec{b}_k \xi_k(t) = \sum_{k=1}^f \vec{b}_k C_k \cos(\omega_k t - \delta_k) . \quad (2.34)$$

Die  $\omega_k$  sind die Eigenfrequenzen oder *Normalfrequenzen*. Bei *Normalschwingungen* ist nur eine Normalkoordinate angeregt, zum Beispiel  $\xi_k$ , und die anderen sind in Ruhe. Dann ist

$$\vec{q}(t) = \vec{b}_k C_k \cos(\omega_k t - \delta_k) \quad (2.35)$$

ohne Summation über  $k$ . Hierzu eine Bemerkung, das System kehrt nie in seine Anfangslage zurück, wenn die  $\omega_k$  nicht in rationalen Verhältnissen zueinander stehen.

- Die Konstanten  $C_k$  und  $\delta_k$  werden wie immer durch die Anfangsbedingungen bestimmt,

$$\begin{aligned} \vec{q}_0 = \vec{q}(t=0) &= \sum_{k=1}^f \vec{b}_k C_k \cos \delta_k \\ \dot{\vec{q}}_0 = \dot{\vec{q}}(t=0) &= \sum_{k=1}^f \vec{b}_k C_k \omega_k \sin \delta_k . \end{aligned} \quad (2.36)$$

## 2.2.4 Gekoppelte Pendel

Nachdem wir die Normalkoordinaten formal eingeführt haben fehlt uns noch ein Beispiel.

- Gegeben seien zwei gleiche ebene Pendel der Länge  $l$  mit dem Abstand  $x_0$ , an denen Massenpunkte  $m$  hängen. Die Pendel seien durch eine Feder mit der Ruhelänge  $x_0$  und der Federkonstanten  $k$  aneinander gekoppelt.
- Geeignete Parameter für dieses Systems sind die Auslenkwinkel  $q_1 = \varphi_1$  und  $q_2 = \varphi_2$ . Damit ist die kinetische Energie

$$T = \frac{m}{2} (l^2 \dot{\varphi}_1^2 + l^2 \dot{\varphi}_2^2) \quad \Rightarrow \quad T = ml^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.37)$$

Die potentielle Energie setzt sich aus den Beiträgen des Schwerfelds und der Feder zusammen,

$$V = -mgl [\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2] + \frac{k}{2} \left[ \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} - x_0 \right]^2. \quad (2.38)$$

Für kleine Auslenkungen können die  $y_j$  gegenüber den  $x_j$  vernachlässigt werden, wenn wir  $x_j = l \sin \varphi_j \approx l \varphi_j$  taylor. Mit  $\cos \varphi_j \approx 1 - \varphi_j^2/2$  wird die potentielle Energie

$$\begin{aligned} V &= -mgl \left( 2 - \frac{\varphi_1^2}{2} - \frac{\varphi_2^2}{2} \right) + \frac{k}{2} \left[ \sqrt{(x_0 + l\varphi_1 - l\varphi_2)^2} - x_0 \right]^2 \\ &\approx \frac{mgl}{2} (\varphi_1^2 + \varphi_2^2) + \frac{k}{2} l^2 (\varphi_1 - \varphi_2)^2 \\ \Leftrightarrow V &= mgl \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + kl^2 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.39)$$

- Die Gleichung  $\det(V - \lambda T) = 0$  bestimmt dann das charakteristische Polynom

$$(mgl + kl^2 - ml^2 \lambda)^2 - k^2 l^4 = 0, \quad (2.40)$$

mit den Lösungen

$$\lambda_1 = \frac{g}{l} \quad \text{und} \quad \lambda_2 = \frac{g}{l} + 2 \frac{k}{m}. \quad (2.41)$$

Die beiden entsprechend (2.30) normierten Eigenvektoren sind

$$\vec{b}_1 = \frac{1}{\sqrt{2ml}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b}_2 = \frac{1}{\sqrt{2ml}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad (2.42)$$

d.h. die Normalschwingungen entsprechen solchen Schwingungen, bei denen die beiden Pendel entweder gleichphasig oder gegenphasig schwingen.

# Kapitel 3

## Systeme mit Nebenbedingungen

Im vorigen Kapitel haben wir gelernt, dass geeignete Koordinaten für die Freiheitsgrade eines Systems gezielt konstruieren kann. Bei der Konstruktion der Freiheitsgrade spielen Neben- oder Zwangsbedingungen eine zentrale Rolle. Wir verfolgen also weiter die Abstrahierung von Koordinaten und die Konstruktion von Bewegungsgleichungen, jetzt aber im Hinblick auf allgemeine Zwangsbedingungen.

### 3.1 Vorbereitung

#### 3.1.1 Verallgemeinerte Koordinaten

- Neben- oder *Zwangsbedingungen* können auf verschiedene Weisen formuliert werden. Oft ist es möglich, sie für  $N$  Massenpunkte und ihre Ortsvektoren  $\vec{x}_i$  durch Gleichungen der Art

$$g_i(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N, t) = 0, \quad 1 \leq i \leq r \quad (3.1)$$

auszudrücken. Hier haben wir  $r$  Bedingungen, also reduziert sich die Anzahl der Freiheitsgrade auf  $f = 3N - r$ . Wir nehmen an, dass die  $g_i$  genügend oft differenzierbar sind. Beispiele für Nebenbedingungen dieser Art sind:

- Bewegung auf einer Ebene, also  $\vec{x} \cdot \vec{n} = 0$ , wobei  $\vec{n}$  der Normalenvektor der Ebene ist.
- Bewegung auf einer Kugel, also  $|\vec{x}| - R = 0$ .

Nebenbedingungen dieses Typs heißen *holonom*. Ein Beispiel für eine *nichtholonomie* Nebenbedingung ist die Bewegung innerhalb einer Kugel, also  $|\vec{x}| \leq R$ . Bedingungen, die die Zeit explizit enthalten, heißen *rheonom*, anderenfalls *skleronom* (rheos, fließend; skleros, starr).

- Der *Konfigurationsraum* eines Systems ist der Teil des  $3N$ -dimensionalen Raums, der von den Koordinaten der  $N$  Massenpunkte erreicht werden kann. Die  $r$  Bedingungsgleichungen  $g_i$  definieren eine  $(3N - r)$ -dimensionale sogenannte Untermannigfaltigkeit im Konfigurationsraum. Dort kann die Lage des Systems durch  $f = 3N - r$  unabhängige *verallgemeinerte Koordinaten*  $q_j$  angegeben werden.
- Zum Beispiel ist der Konfigurationsraum eines freien Massenpunkts  $\mathbb{R}^3$ . Die Nebenbedingung  $|\vec{x}| = R$  definiert eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit, eine Kugelschale. So kann die Nebenbedingung für die Bewegung auf der Oberfläche einer Kugel mit Radius  $R$ ,  $|\vec{x}| - R = 0$ , durch

$$\vec{x} = R \cdot \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi \\ \cos \vartheta \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

mit  $0 \leq \vartheta \leq \pi$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$  angegeben werden. Die verallgemeinerten Koordinaten  $(q_1, q_2)$  sind hier die Winkel  $(\vartheta, \varphi)$ .

### 3.1.2 Lagrange-Multiplikatoren

- Unsere Beschreibung läuft darauf hinaus, Differentialgleichungen unter Nebenbedingungen zu lösen. Dafür gibt es etablierte Verfahren. Als Beispiel betrachten einen Zylinder mit einem variablen Radius  $R$  und einer variablen Höhe  $H$ . Wir wollen die Oberfläche  $A = 2\pi RH + 2\pi R^2$  als Funktion von  $R$  und  $H$  minimieren,

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial A}{\partial R} dR + \frac{\partial A}{\partial H} dH \\ &= (2\pi H + 4\pi R) dR + 2\pi R dH . \end{aligned} \quad (3.3)$$

Aufgelöst nach  $dR/dH$  erhalten wir eine Differentialgleichung für die Linie mit der minimalen Oberfläche.

- Ausserdem fordern wir ein festes Volumen  $V$ , also die holonome Nebenbedingung

$$\pi R^2 H - V = 0 . \quad (3.4)$$

Änderungen im  $R$  und  $H$  müssen diese Bedingung erhalten,

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial R} (\pi R^2 H - V) dR + \frac{\partial}{\partial H} (\pi R^2 H - V) dH \\ &= 2\pi R H dR + \pi R^2 dH . \end{aligned} \quad (3.5)$$

Aus (3.3) und (3.5) können wir die Werte für  $R$  und  $H$  bestimmen, die der minimalen Oberfläche bei konstantem Volumen entspricht. Wir können zum Beispiel zunächst  $dH$  eliminieren,

$$\begin{aligned} -\frac{2\pi RH}{\pi R^2} dR &= -\frac{2\pi H + 4\pi R}{2\pi R} dR \\ \Leftrightarrow 4\pi RH &= 2\pi RH + 4\pi R^2 \quad \Leftrightarrow R = \frac{H}{2}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

- Es gibt eine andere Methode, die sich leichter auf komplexere Systeme erweitern lässt. Sie beruht auf der Beobachtung, dass in der oben beschriebenen Rechnung  $dR$  und  $dH$  nicht bestimmt werden. Wir kombinieren die beiden Gleichungen stattdessen mit Hilfe eines unbestimmten *Lagrange-Multiplikators*  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,

$$0 = (2\pi H + 4\pi R + \lambda 2\pi RH) dR + (2\pi R + \lambda \pi R^2) dH \quad (3.7)$$

und erhalten für allgemeines  $dH$  und  $dR$  zwei Bedingungen. Aus der ersten bestimmen wir die Hilfsgröße  $\lambda$ ,

$$2\pi R + \lambda \pi R^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = -\frac{2}{R}, \quad (3.8)$$

und dann die Korrelation von  $R$  und  $H$

$$\begin{aligned} 0 &= 2\pi H + 4\pi R - \frac{2}{R} 2\pi RH \\ &= 2\pi H + 4\pi R - 4\pi H \\ \Leftrightarrow H &= 2R. \end{aligned} \quad (3.9)$$

- Diese Methode für die Suche nach Extrema von Funktionen unter Nebenbedingungen verallgemeinern wir. Für eine Funktion  $f(\vec{x})$  folgen wir zunächst Linien mit konstantem Funktionswert, wenn der Pfad senkrecht auf dem Gradienten steht oder die totale Ableitung verschwindet,

$$df = \vec{\nabla} f \cdot d\vec{x} = 0. \quad (3.10)$$

Gleichzeitig reduziert eine holonome Nebenbedingung  $g(\vec{x}) = 0$  die Anzahl der Freiheitsgrade. Entlang unseres Pfades darf sich auch  $g(\vec{x})$  nicht ändern, also

$$dg = \vec{\nabla} g \cdot d\vec{x} = 0. \quad (3.11)$$

Zusammen spannen  $\vec{\nabla} f$  und  $\vec{\nabla} g$  eine Ebene senkrecht zu  $d\vec{x}$  auf. Um das Extremum von  $f(\vec{x})$  zu finden folgen wir in dieser Ebene so lange dem Gradienten  $\vec{\nabla} f$ , bis die Nebenbedingung jeder weiteren Veränderung entgegensteht, also  $\vec{\nabla} g$  in dieselbe Richtung wie  $\vec{\nabla} f$  zeigt,

$$\vec{\nabla} f + \lambda \vec{\nabla} g = 0. \quad (3.12)$$



Wir greifen eine Richtung heraus, um  $\lambda$  zu bestimmen,

$$\frac{\partial f}{\partial x_3} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_3} = 0, \tag{3.13}$$

solange  $\partial g / \partial x_3 \neq 0$ . Ebenso müssen die beiden anderen Ableitungen verschwinden,

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_j} = 0 \quad (j = 1, 2) \tag{3.14}$$

Aus diesen Bedingungen erhalten wir die erlaubte Koordinatenfläche.

- Wenn  $r$  Bedingungen  $g_k = 0$  ( $1 \leq k \leq r$ ) zu erfüllen sind, dann wird jede mit einem eigenen Lagrange-Multiplikator  $\lambda_i$  berücksichtigt. Die Bedingungen für Extrema unter Nebenbedingungen lautet

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{k=1}^r \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial x_j} = 0 \quad (1 \leq j \leq N). \tag{3.15}$$

### 3.2 Das d’Alembertsche Prinzip

Im vorigen Kapitel haben wir die Bewegung von Teilchen unter Nebenbedingungen mit Hilfe geeigneter Koordinaten beschrieben. Die Newtonsche Mechanik und Kräfte haben hier keine Rolle gespielt. Das wird auch so bleiben, allerdings werfen wir vorher noch einen kurzen Blick auf die Verbindung zwischen Neben- oder Zwangsbedingungen und entsprechenden *Zwangskräften*.

#### 3.2.1 Zwangskräfte im Gleichgewicht

- Als Beispiel betrachten wir eine Kugel, die unter dem Einfluss der Schwerkraft  $\vec{F}$  reibungsfrei in einer Röhre in der  $y$ - $z$ -Ebene gleite, beschrieben durch die holonome Zwangsbedingung

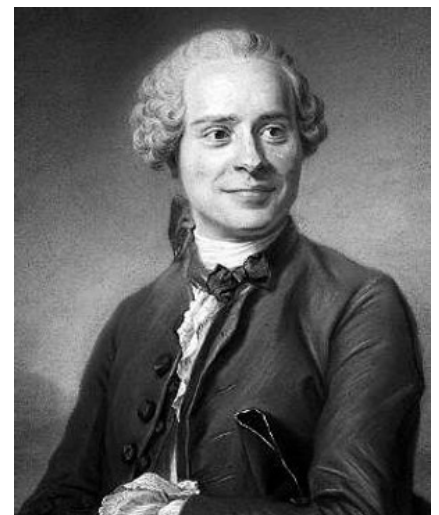
$$g(y, z) = 0 \tag{3.16}$$

Die Tangentialkomponente von  $\vec{F}$  relativ zur Röhre verursacht eine Bewegung, während die Normalkomponente  $\vec{F} \cdot \hat{n}$  durch eine Zwangskraft  $\vec{Z}$  kompensiert wird,

$$\vec{Z} = -(\vec{F} \cdot \hat{n}) \hat{n}. \tag{3.17}$$

Die Bewegung in der Röhre entspricht einem hypothetischen Gleichgewicht

$$\vec{F} + \vec{Z} = \vec{0}. \tag{3.18}$$



Jean Baptiste le Rond d’Alembert

- Wir wollen die Gleichgewichtsbedingung in allgemeinen Fällen finden. Dazu denken wir uns eine *virtuelle* Verrückung  $\delta\vec{x}$

$$\delta\vec{x} = \begin{pmatrix} \delta y \\ \delta z \end{pmatrix}. \quad (3.19)$$

Solange der Massenpunkt in der Röhre bleibt, ändert sich  $g$  analog zu (3.11) nicht. Wir schreiben diesmal diese Bedingung aus

$$0 = \vec{\nabla}g \cdot \delta\vec{x} = \frac{\partial g(y, z)}{\partial y} \delta y + \frac{\partial g(y, z)}{\partial z} \delta z. \quad (3.20)$$

Die zur virtuelle Verrückung gehörende virtuelle Arbeit verschwindet genau im Gleichgewicht,

$$\begin{aligned} \delta A &= (\vec{F} + \vec{Z}) \cdot \delta\vec{x} \\ &= \vec{0} \cdot \delta\vec{x} = 0. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Da immer  $\delta\vec{x}$  tangential und  $\vec{Z}$  normal zur Röhre ist, gilt  $\vec{Z} \cdot \delta\vec{x} = 0$ . Im Gleichgewicht können also weder virtuelle noch äußere Kräfte virtuelle Arbeit leisten,

$$\vec{F} \cdot \delta\vec{x} = 0 \quad \text{und} \quad \vec{\nabla}g \cdot \delta\vec{x} = 0. \quad (3.22)$$

Das ist das *d'Alembertsche Prinzip*, und es zeigt unter anderem die Grenzen unseres Kräfte-Zugangs.

- Wir wissen schon, dass wir die Gleichgewichtsbedingungen (3.22) mit Hilfe eines Lagrange-Multiplikators  $\lambda$  erfüllen können,

$$\begin{aligned} 0 &= (\vec{F} + \lambda \vec{\nabla}g) \cdot \delta\vec{x} \\ &= \left( F_y + \lambda \frac{\partial g}{\partial y} \right) \delta y + \left( F_z + \lambda \frac{\partial g}{\partial z} \right) \delta z. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Wenn wir ebenfalls  $g(y, z) = 0$  erfüllen, dann erhalten wir mit (3.23) drei Gleichungen für die Unbekannten  $\lambda$ ,  $F_y$ , und  $F_z$ .

- Als Beispiel betrachten wir eine Parabel in der  $y$ - $z$ -Ebene,

$$g(y, z) = z - y^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla}g(y, z) = \begin{pmatrix} -2y \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3.24)$$

Die Schwerkraft ist

$$\vec{F}(y, z) = -mg\vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

Das Prinzip der virtuellen Arbeit liefert zunächst

$$(\vec{F} + \lambda \vec{\nabla}g(y, z)) \cdot \delta\vec{x} = \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2y \\ 1 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} \delta y \\ \delta z \end{pmatrix} = 0, \quad (3.26)$$

woraus

$$-2\lambda y \delta y = 0 \quad \text{und} \quad (-mg + \lambda)\delta z = 0 \quad (3.27)$$

folgen. Wenn wieder  $\delta y$  und  $\delta z$  beliebig sein dürfen, erhalten wir

$$\lambda = mg \quad \text{und} \quad y = 0. \quad (3.28)$$

In der Gleichgewichtslage mit  $y = 0$  muss wegen der Zwangsbedingung auch  $z = 0$  sein.