Universität Heidelberg WS 2002 / 2003

2. Präsenzübung zur Vorlesung Theoretische Physik I (Mechanik) für die Übungsstunde am 30.10.02

Für die aktive Mitarbeit gibt es **2 Punkte** !

Aufgabe P3: *Gradient, Divergenz, Rotation*

Wiederholen Sie zusammen mit Ihrer Tutorin bzw. Ihrem Tutor die Begriffe des Gradienten, der Divergenz und der Rotation:

a) Berechnen Sie

$$\mathrm{grad}(\vec{a}\cdot\vec{r}) \qquad \mathrm{grad}(r)\ , \qquad \mathrm{grad}(\tfrac{1}{r^2}), \qquad \text{und} \qquad \mathrm{grad}(f(r))$$

mit $\vec{a} =$ konstanter Vektor und $r = |\vec{r}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$

b) Zeigen Sie:

$$\begin{aligned} \mathrm{div}(\vec{a}+\vec{b}) &= \mathrm{div}(\vec{a}) + \mathrm{div}(\vec{b}) \\ \mathrm{div}(\gamma\vec{a}) &= \gamma\,\mathrm{div}(\vec{a}) \quad \text{für } \gamma = \text{reelle Konstante} \\ \mathrm{div}(\varphi\vec{a}) &= \varphi\,\mathrm{div}(\vec{a}) + \vec{a}\cdot\mathrm{grad}(\varphi) \end{aligned}$$

Dabei seien $\vec{a}(\vec{r})$ und $\vec{b}(\vec{r})$ vektorielle Felder und $\varphi(\vec{r})$ ein skalares Feld.

Berechnen Sie weiterhin:

$$\mathrm{div}(\vec{\alpha}), \qquad \mathrm{div}(\vec{r}) \qquad \text{und} \qquad \mathrm{div}(\vec{r}\times\vec{\alpha}).$$

Dabei sei $\vec{\alpha}$ ein konstanter Vektor.

c) Zeigen Sie für vektorielle Felder $\vec{a}(\vec{r})$, $\vec{b}(\vec{r})$, das skalare Feld $\varphi(\vec{r})$ und die reelle Konstante α:

$$\begin{aligned} \mathrm{rot}(\vec{a}+\vec{b}) &= \mathrm{rot}(\vec{a}) + \mathrm{rot}(\vec{b}) \\ \mathrm{rot}(\alpha\,\vec{a}) &= \alpha\,\mathrm{rot}(\vec{a}) \\ \mathrm{rot}(\varphi\,\vec{a}) &= \varphi\,\mathrm{rot}(\vec{a}) + \mathrm{grad}(\varphi)\times\vec{a} \\ \mathrm{rot}(\mathrm{grad}(\varphi) &= 0 \\ \mathrm{div}(\mathrm{rot}(\vec{a})) &= 0 \\ \mathrm{rot}(f(r)\,\vec{r}) &= 0 \end{aligned}$$

Aufgabe P4: *Linienintegrale, konservative Kraftfelder*
Ein Massenpunkt bewege sich in dem Kraftfeld

$$\vec{F}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} ax_2 \\ ax_1 \\ b \end{pmatrix}$$

mit positiven Konstanten a und b.

a) Zeigen Sie, dass es sich um eine konservative Kraft handelt.

b) Berechnen Sie die Arbeit, die aufzubringen ist, um den Massenpunkt längs einer Geraden von

$$P_0 : \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{nach} \qquad P : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

zu bringen.

c) Wie lautet das Potential der Kraft $\vec{F}$?

d) Wie ändert sich die zu leistende Arbeit, wenn man den Massenpunkt längs der Koordinatenachsen

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

von P_0 nach P verschiebt ?

Aufgabe P5: *Linienintegrale, Rotation*

Eine starre Scheibe in der x_1-x_2-Ebene rotiert mit der Winkelgeschwindigkeit ω gegen den Uhrzeigersinn um die x_3-Achse. Die Geschwindigkeit der Massenpunkte definieren ein Geschwindigkeitsfeld $\vec{v}(x_1, x_2)$. Geben Sie die kartesischen Komponenten von $\vec{v}$ an und berechnen Sie $\mathrm{rot}(\vec{v})$. Berechnen Sie das Linienintegral

$$\int_K \vec{v} \cdot d\vec{r}$$

entlang eines Kreises K um den Ursprung mit Radius R. Die Kreiskurve soll dabei gegen den Uhrzeigersinn durchlaufen werden.