4. Präsenzübung zur Vorlesung Theoretische Physik I (Mechanik)
für die Übungsstunde am 20.11.02

Für die aktive Mitarbeit gibt es **2 Punkte** !

Aufgabe P7: *Kegelschnitte*

a) **Ellipse**
Definition: Die Ellipse ist die Menge (der geometrische Ort) aller Punkte $P = (x, y)$, für die die Summe der Abstände von zwei gegebenen festen Punkten $F_1 = (e, 0)$ und $F_2 = (-e, 0)$ (Brennpunkte) konstant ist ($= 2a$) (siehe Fig.1):

$$\overline{F_1 P} + \overline{F_2 P} = 2a \tag{1}$$

$\overline{AB} = 2a$ heißt die *große Achse* und $\overline{CD} = 2b$ heißt die *kleine Achse* der Ellipse.

(i) Drücken Sie b durch a und e aus.
Welche Kurve ergibt sich im Spezialfall $a = b$?

(ii) Bestimmen Sie die Ellipsengleichung in kartesischen Koordinaten.

(iii) Bestimmen Sie die Ellipsengleichung in Polarkoordinaten (mit Urpsrung in F_1), d.h. bestimmen Sie $r = |\vec{r}| = r(\varphi)$. Verwenden Sie dazu die Größen

$$\epsilon := \frac{e}{a} < 1\,; \qquad\qquad p := \frac{b^2}{a}$$

ϵ heißt auch *numerische Exzentrizität* und p heißt *Halbparameter* (halbe Länge der durch einen Brennpunkt parallel zur kleinen Achse gezogenen Sehne, siehe Fig. 1).

(iv) Bestimmen Sie die Parameterform

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \end{pmatrix}$$

der Ellipse.

(v) Bestimmen Sie die Fläche einer Ellipse.

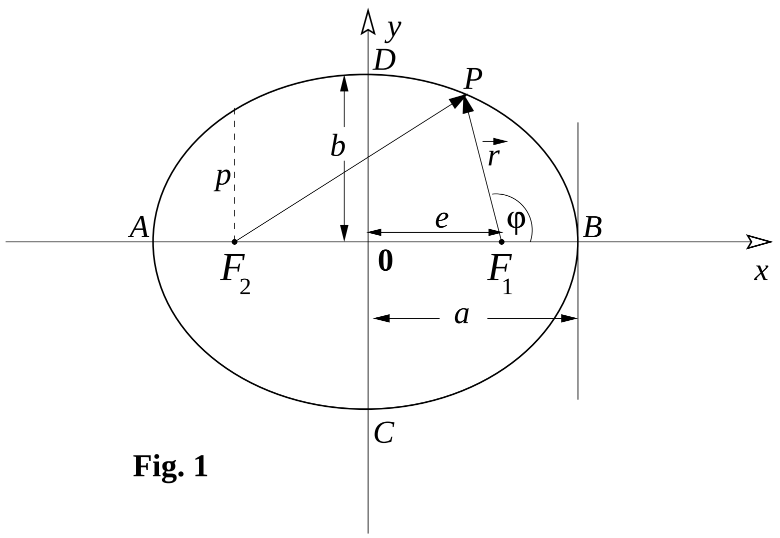

Fig. 1

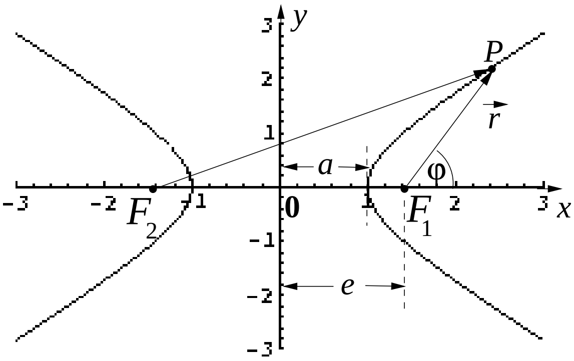

Fig. 2

b) **Hyperbel:**
Definition: Die Hyperbel ist die Menge aller Punkte $P = (x, y)$, für die die Differenz der Abstände von zwei gegebenen festen Punkten $F_1 = (e, 0)$ und $F_2 = (-e, 0)$ (Brennpunkte) konstant ist ($= 2a$) (siehe Fig.2):

$$\overline{F_2P} - \overline{F_1P} = \pm 2a$$

Die Punkte für die $\overline{F_2P} - \overline{F_1P} = 2a$ gehören einem Zweig der Hyperbel an (in Fig. 2 dem rechten); die Punkte mit $\overline{F_1P} - \overline{F_2P} = 2a$ dem anderen (linken) Zweig. Analog zur Ellispe definiert man

$$\epsilon := \frac{e}{a} > 1\,; \qquad p := \frac{b^2}{a}$$

mit $b^2 := e^2 - a^2$.

(i) Bestimmen Sie die Hyperbelgleichung in kartesischen Koordinaten.

(ii) Bestimmen Sie die Hyperbelgleichung in Polarkoordinaten (mit Ursprung in F_1), d.h. bestimmen Sie $r = |\vec{r}| = r(\varphi)$.

b) **Parabel:**
Definition: Die Parabel ist die Menge der Punkte $P = (x, y)$, die von einem festen Punkt (Brennpunkt) $F = (-\frac{p}{2}, 0)$ und einer festen Geraden (Leitlinie) gleich weit entfernt sind (siehe Fig. 3). p heißt Halbparameter und ist die Entfernung des Brennpunktes von der Leitlinie.

(i) Bestimmen Sie die Parabelgleichung in kartesischen Koordinaten (legen Sie den Scheitel der Parabel in den Ursprung).

(ii) Bestimmen Sie die Parabelgleichung in Poloarkoordinaten (mit Ursprung im Brennpunkt F).

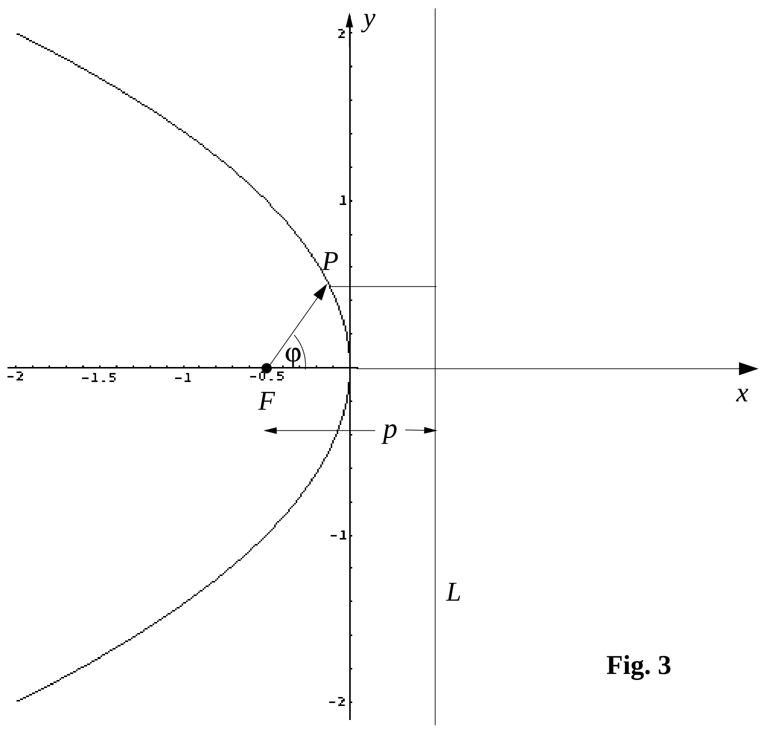

Fig. 3