Universität Heidelberg WS 02/03

10. Übungsblatt zur Vorlesung Theoretische Physik I (Mechanik)

Abgabe: Mittwoch, 22.Januar 2003 in den Übungen.

Aufgabe A25: *Momentane Winkelgeschwindigkeit: Komponenten im körperfesten System*
Zur Beschreibung der Bewegung eines starren Körpers führt man ein sogenanntes körperfeste Koordinatensystem ein: Dazu markiert man einen Punkt O_B auf dem Körper und denkt sich ein in O_B fest mit dem Körper verbundenes rechtshändiges Orthonormalsystem (K) mit den Basisvektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. Weiterhin betrachtet man die Lage des Körpers in einem raumfesten Intertialsystem (I), das durch eine rechtshändige Orthonormalbasis $(\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3)$ gegeben ist (siehe Fig. 1). In der Vorlesung wurde gezeigt, dass für irgendeinen Punkt $\vec{r}_\alpha = \vec{R}(t) + \vec{x}_\alpha(t)$ des starren Körpers (siehe Fig. 1) gilt

$$\dot{\vec{r}}_\alpha(t) \;=\; \dot{\vec{R}}(t) \;+\; \vec{\Omega}(t) \times \vec{x}_\alpha(t)$$

Dabei ist $\vec{\Omega}(t)$ die sogenannte *momentane Winkelgeschwindigkeit.* Im Inertialsystem (I) (Basis $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3$) hat $\vec{\Omega}(t)$ die Komponenten $\Omega_i^{(I)}$:

$$\vec{\Omega}(t) \;=\; \Omega_i^{(I)}\, \vec{n}_i \quad .$$

Wie Sie weiterhin aus der Vorlesung wissen, lassen sich die Komponenten $\Omega_i^{(I)}$ von $\vec{\Omega}(t)$ folgendermaßen durch die Eulerschen Winkel φ, ϑ, ψ und ihre Ableitungen nach der Zeit ausdrücken:

$$\begin{aligned}
\Omega_1^{(I)} &= \cos(\varphi)\, \dot{\vartheta} \;+\; \sin(\vartheta)\sin(\varphi)\, \dot{\psi} \\
\Omega_2^{(I)} &= \sin(\varphi)\, \dot{\vartheta} \;-\; \sin(\vartheta)\cos(\varphi)\, \dot{\psi} \\
\Omega_3^{(I)} &= \dot{\varphi} \;+\; \cos(\vartheta)\, \dot{\psi}
\end{aligned}$$

Bestimmen Sie nun mit Hilfe der in der Vorlesung angegebenen Drehmatrix $D(\varphi, \vartheta, \psi)$, die den Übergang vom körperfesten System $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ ins Intertialsystem $(\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3)$ beschreibt, die Komponeten $\Omega_i^{(K)}$ von $\vec{\Omega}(t) = \Omega_i^{(K)}\, \vec{e}_i$ im körperfesten System $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ als Funktion der Eulerschen Winkel und ihrer Ableitungen. **(4 Punkte)**

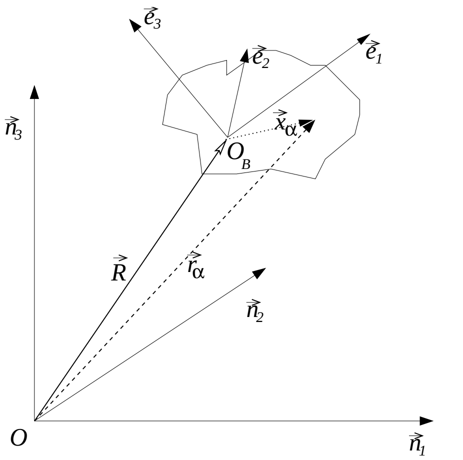

Fig. 1

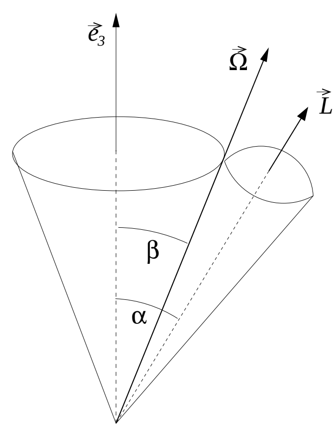

Fig. 2

Aufgabe A26: *Trägheitsmoment: Rohrstück und Vollkugel auf schiefer Ebene*
Ein homogenes Rohrstück mit der Dichte ρ, der Länge L, Außendurchmesser $2R$, Innendurchmesser $2r = R$ sowie eine homogene Vollkugel mit Radius R und mit der gleichen Masse M wie das Rohrstück rollen eine schiefe Ebene der Länge l und Neigung φ hinab.

a) Berechnen Sie für beide Körper das Trägheitsmoment um die Symmetrieachse. **(2 Punkte)**

b) Stellen Sie die Lagrangefunktion auf und leiten Sie die Bewegungsgleichungen ab. **(2 Punkt)**

c) Berechnen Sie für beide Körper die Laufzeit und vergleichen Sie dazu einen (reibungsfrei) gleitenden Massenpunkt der gleichen Masse M. **(2 Punkte)**

Aufgabe A27: *Symmetrischer, kräftefreier Kreisel*
Einen starren, rotierenden Körper bezeichnet man auch als Kreisel. Ein Kreisel heißt symmetrisch, wenn zwei seiner Hauptträgheitsmomente gleich sind. Es sei z.B. $I_1 = I_2$. Die dritte Hauptträgheitsachse, die sich auf I_3 bezieht, bezeichnet man auch als *Figurenachse*. Diese kennzeichnet die Lage des Kreisels im Raum. Wir betrachten nun die Bewegung eines kräftefreien symmetrischen Kreisels.

a) Wählen Sie ein (geeignetes) körperfestes Koordinatensystem $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, so dass die $\vec{e}_3$ Achse in Richtung der Figurenachse zeigt und formulieren Sie die Eulerschen Kreiselgleichungen für die Komponenten $\Omega_i^{(K)}$ der momentanen Winkelgeschwindigkeit in diesem Koordinatensystem. **(2 Punkt)**

b) Zeigen Sie, dass $\vec{e}_3$, $\vec{\Omega}$ und der Drehimpuls $\vec{L}$ stets in einer Ebene liegen. **(1 Punkt)**

c) Lösen Sie die in a) aufgestellten Eulerschen Kreiselgleichungen und diskutieren Sie die Bewegung von $\vec{\Omega}(t)$ und $\vec{L}(t)$ im körperfesten Koordinatensystem: Zeigen Sie, dass $\vec{\Omega}(t)$ und $\vec{L}(t)$ im körperfesten System jeweils auf einem Kegelmantel um die Figurenachse $\vec{e}_3$ umlaufen (siehe Fig. 2). Bestimmen Sie die Winkelgeschwindigkeit dieser Umlaufbewegung sowie die Winkel β zwischen $\vec{e}_3$ und $\vec{\Omega}$ sowie α zwischen $\vec{e}_3$ und $\vec{L}$ als Funktion der Hauptträgheitsmomente. **(3 Punkte)**

Tipp zur Lösung der Eulerschen Kreiselgleichungen: Fassen Sie $\Omega_1^{(K)}$ und $\Omega_2^{(K)}$ zu einer komplexen Größe $u := \Omega_1^{(K)} + i\Omega_2^{(K)}$ zusammen.