3. Übungsblatt zur Vorlesung Theoretische Physik I (Mechanik)

Abgabe: Mittwoch, 13.November 2002 in den Übungen.

Aufgabe A7: *Gedämpfter harmonischer Oszillator*
Die Differentialgleichung

$$\ddot{x}(t) + 2\beta\,\dot{x}(t) + \omega_0^2\,x(t) = 0$$

mit den reellen positiven Konstanten β und ω_0 beschreibt einen eindimensionalen harmonischen Oszillator der Eigenfrequenz ω_0 und einer Reibungskraft, die proportional zur Geschwindigkeit ist.

a) Bestimmen Sie den zeitlichen Verlauf der Auslenkung $x(t)$ mit den Anfangsbedingungen $x(0) = x_0,\ \dot{x}(0) = v_0$ für den Fall der schwachen Dämpfung ($\beta < \omega_0$) und den Fall starker Dämpfung ($\beta > \omega_0$). Skizzieren Sie die Lösungen. **(2 Punkte)**

b) Auf den Oszillator wirke nun zusätzlich eine äußere, periodische Kraft

$$F(t) = m\,f_0\cos(\Omega t)\,.$$

Bestimmen Sie $x(t)$ und zeigen Sie, dass $x(t)$ für $t \gg t_0$ übergeht in

$$x(t) = A(\Omega)\cos(\Omega t - \delta(\Omega)).$$

Schätzen Sie t_0 ab. Berechnen und diskutieren Sie (anhand einer Skizze) die Abhängigkeit der Amplitude $A(\Omega)$ und der Phase $\delta(\Omega)$ von der Anregungsfrequenz Ω. **(3 Punkte)**

Aufgabe A8: *Potential von Kugelschale und Vollkugel*

a) Eine Kugelschale mit innerem Radius R_i und äußerem Radius R_a habe die konstante Dichte ρ. Berechnen Sie das Schwerepotential sowie die daraus resultierende Kraft an einem Ort mit Abstand r vom Mittelpunkt der Kugel für die Fälle

(i) $r \le R_i$; (ii) $R_i \le r \le R_a$; (iii) $R_a \le r$. **(3 Punkte)**

b) Bestimmen Sie aus a) das Potential außerhalb und innerhalb einer Vollkugel mit Radius R. Diskutieren Sie insbesondere die Kraft im Inneren der Kugel. **(2 Punkte)**

Aufgabe A9: *Elastischer Stoß bzw. Streuung*
Betrachten Sie die Bewegung zweier Massenpunkte m_1 und m_2 zwischen denen nur innere Kräfte wirken. Die Kräfte seien durch ein kugelsymmetrisches Potential $V_{12} = V(r)$ ($r = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$) gegeben. Das Potential sei von endlicher Reichweite: $V(r) = 0$ für $r > R$ mit einer Konstanten R. Die beiden Teilchen sollen aufeinander zulaufen. Solange ihr Abstand $r > R$ ist, wirkt keine Kraft auf die Teilchen. Sie bewegen sich dann geradlinig gleichförmig mit den Geschwindigkeiten $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$. Wenn sich die Teilchen genügend nahe kommen, wird eine Wechselwirkung eintreten (Zusammenstoß). Nach dem Stoß, wenn die Teilchen wieder genügend weit entfernt sind, bewegen sie sich wieder gleichförmig geradlinig, aber im allgemeinen mit anderen Geschwindigkeiten $\vec{v}_1{}'$ und $\vec{v}_2{}'$. Wir wollen annehmen, dass die

Summe der kinetischen Energie der beiden einlaufenden gleich der Summe der kinetischen Energie der beiden auslaufenden Teilchen ist (**volkommen elastischer Stoß**). Ziel dieser Aufgabe ist es herauszufinden, welche allgemeinen Aussagen man ,ohne weitere Kenntnis des Potentials, über die Endimpulse durch Anwendung der Erhaltungssätze machen kann. Zunächst seien dazu die folgenden Größen definiert:

$$\vec{r}_1(t)\,,\,\vec{r}_2(t) \;=\; \text{Ortsvektoren der Massenpunkte;} \quad \vec{v}_1 = \dot{\vec{r}}_1 \quad ; \quad \vec{v}_2 = \dot{\vec{r}}_2$$

$$M \;:=\; m_1 \,+\, m_2 \quad \text{Gesamtmasse;} \qquad \mu \;:=\; \frac{m_1\,m_2}{M} \quad \text{reduzierte Masse;}$$

$$\vec{r}_s \;:=\; \frac{m_1\vec{r}_1 \,+\, m_2\vec{r}_2}{M} \quad \text{Schwerpunkt;} \qquad \vec{P} \;:=\; M\dot{\vec{r}}_s \;=\; \vec{p}_1 + \vec{p}_2;$$

$$\vec{r} \;:=\; \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \qquad \text{und} \qquad \vec{p} \;:=\; \mu\dot{\vec{r}} \quad \text{Relativimpuls}$$

Für viele Zwecke ist es günstig, den Stoßprozess in einem Koordinatensystem zu betrachten, in dem der Schwerpunkt ruht (*Schwerpunktsystem*). Größen im Schwerpunktsystem werden durch einen * gekennzeichnet (also z.B. $\vec{P}^* \;=\; \vec{0}$). Nach dem Stoß seien alle Größen mit einem $'$ versehen.

a) Berechnen Sie die Impulse $\vec{p}_1$, $\vec{p}_2$ aus $\vec{P}$ und $\vec{p}$ sowie die Impuls $\vec{p}_1^*$, $\vec{p}_2^*$ aus $\vec{p}$. **(1 Punkt)**

b) Was folgt aus dem Impuls- und Energieerhaltungssatz für die Impulse $\vec{p}_1\,'^*$ und $\vec{p}_2\,'^*$ **nach** dem Stoß ? **(1 Punkt)**

c) Zeigen Sie, wie $\vec{p}_1\,'$ und $\vec{p}_2\,'$ mit $\vec{p}_1\,'^*$ bzw. $\vec{p}_2\,'^*$ zusammenhängt. Veranschaulichen Sie sich die erhaltenen Relationen in dem in Fig. 1 dargestellten Diagramm: Die ganze Dynamik des Stoßes steckt in der Lage vom Punkt C ! **(1 Punkt)**

d) Betrachten Sie nun den Spezialfall $\vec{p}_2 \;=\; \vec{0}$ (d.h. das Teilchen mit der Masse m_2 ruht vor dem Stoß). Wie ändert sich das in Fig. 1 dargestellte Diagramm ? **(1 Punkt)**

e) Wir bleiben bei dem Spezialfall aus d) ($\vec{p}_2 \;=\; \vec{0}$). Den Winkel θ zwischen $\vec{p}_1$ und $\vec{p}_1\,'$ bezeichnet man als Streuwinkel (siehe Fig. 2). Den entsprechenden Winkel θ^* zwischen $\vec{p}_1^*$ und $\vec{p}_1\,'^*$ bezeichnet man als Streuwinkel im Schwerpunktsystem. Bestimmen Sie $\tan(\theta)$ sowie $\cos(\theta)$ als Funktion von θ^*. **(2 Punkte)**
Anleitung:
1. Möglichkeit: Betrachten Sie das in d) abgeänderte Diagramm der Fig. 1. Wo sind die Winkel θ und θ^* in diesem Diagramm? Wenn Sie das Lot von C auf AB fällen, erhalten Sie $\tan(\theta)$ als Funktion von θ^*.
2. Möglichkeit: Betrachten Sie $\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_1\,' \;=\; |\vec{p}_1||\vec{p}_1\,'|\cos(\theta)$ und setzen Sie auf beiden Seiten den in c) bestimmten Ausdruck für $\vec{p}_1\,'$ ein.

Fig. 1:

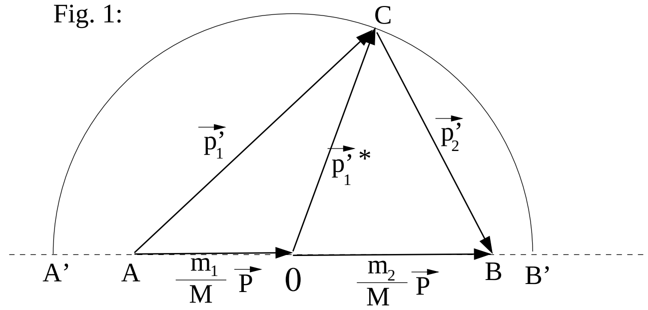

Fig. 2: