

5. ÜBUNGSBLATT ZUR VORLESUNG THEORETISCHE PHYSIK I (MECHANIK)

Abgabe: Mittwoch, 27. November 2002 in den Übungen.

Aufgabe A13: Kepler-Problem

In der Vorlesung haben Sie die Beziehung

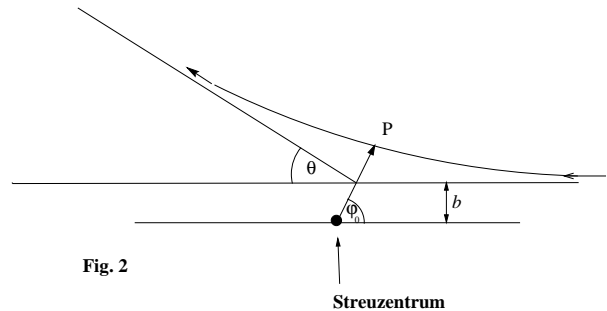
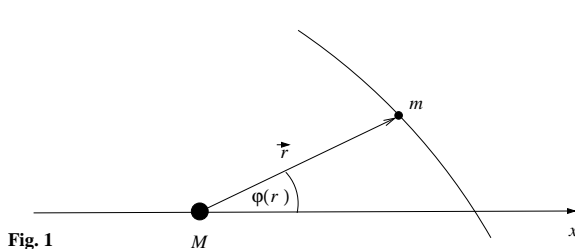
$$\varphi(r) - \varphi_0 = \pm \frac{l}{\sqrt{2\mu}} \int_{r_0}^r \frac{dr'}{r'^2 \sqrt{E_0 - U_{eff}(r')}}$$

zur Bestimmung der Bahn eines abgeschlossenen Zweiteilchensystems mit einem rotations-symmetrischen Zentralkraftfeld kennengelernt. Dabei ist das sogenannte effektive Potential U_{eff} gegeben durch

$$U_{eff}(r) = U(r) + \frac{l^2}{2\mu r^2}$$

mit dem rotationssymmetrischen Potential $U(r)$, der reduzierten Masse μ und dem Betrag des Relativdrehimpulses $l = |\vec{L}_{rel}|$. \vec{r} ist der Relativvektor, der von einem Teilchen zum anderen zeigt (siehe Fig. 1) und E_0 ist die Energie der Relativbewegung. Wenden Sie diese Formel nun an, um das sogenannte Kepler-Problem, d.h. die Bewegung eines Planeten um die Sonne, zu lösen. Das Zweiteilchensystem bestehe also aus der Sonne (mit Masse M) und einem Planeten (mit der Masse m) zwischen denen die Gravitationskraft wirkt:

$$U(r) = -\frac{\kappa}{r} \quad \text{mit} \quad \kappa = \gamma M m$$



- a) Bestimmen Sie das Minimum $U_{eff,min}$ des effektiven Potentials $U_{eff}(r)$. **(1 Punkt)**
- b) Zeigen Sie, dass im Falle $E_0 > U_{eff,min}$ die Bahn $r(\varphi)$ beschrieben wird durch die Polargleichung für einen Kegelschnitt mit einem Brennpunkt im Zentrum (setzen Sie $\varphi_0 = 0$)

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 + \epsilon \cos(\varphi)}$$

Bestimmen Sie p und ϵ also Funktion von l, μ, E_0 und κ . Für welche Energiewerte E_0 ist die Bahn eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel? Wann ergibt sich ein Kreis als Bahn? **(2 Punkte)**

- c) Zeigen Sie, dass in dem Fall, wo die Bahn eine Ellipse ist, die große Halbachse a der Ellipsenbahn nur vom Betrag $|E_0|$ der Energie sowie von der Konstanten κ abhängt. Was ergibt sich für die kleine Halbachse b der Ellipsenbahn? **(1 Punkt)**

- d) Im Aufgabenteil b) haben Sie das erste Keplersche Gesetz gezeigt: *Planeten beschreiben Ellipsenbahnen um die Sonne, wobei in einem Brennpunkt der Ellipse die Sonne steht.*

Das zweite Keplersche Gesetz, das besagt, dass der Fahrstrahl \vec{r} (Sonne-Planet) in gleichen Zeiten gleiche Flächen überstreicht, haben Sie in der Vorlesung als Folge des Drehimpulserhaltungssatzes als allgemeine Eigenschaft von Zentralkraftfeldern kennengelernt. Zeigen Sie nun noch das **dritte Keplersche Gesetz**:

Die Quadrate der Umlaufzeiten zweier Planeten verhalten sich wie die Kuben der großen Halbachsen ihrer Ellipsenbahnen. **(2 Punkte)**

Aufgabe A14: Differentieller und totaler Wirkungsquerschnitt: Rutherford-Streuung

Betrachten Sie die Streuung von (positiv geladenen) α -Teilchen in dem Coulombfeld eines Z -fach positiv geladenen Atomkerns (siehe Fig. 2). Das Potential ist dann gegeben durch

$$U(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r} = \frac{\kappa}{r}$$

mit q_1 =Ladung des α -Teilchens, q_2 =Ladung des Kerns und $\kappa := \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0}$.

- a) Zeigen Sie (analog zum Keplerproblem), dass die Bahn beschrieben wird durch

$$r(\varphi) = \frac{p}{\epsilon \cos(\varphi - \varphi_0) - 1}$$

Geben Sie p und ϵ als Funktion der Energie E_0 und des Stoßparameters b an. **(2 Punkte)**

- b) Zeigen Sie, dass φ_0 der Polarwinkel des Perizentrums P ist (siehe Fig. 2). **(1 Punkt)**
- c) Bestimmen Sie den Streuwinkel θ als Funktion von φ_0 . **(1 Punkt)**
- d) Bestimmen Sie $\sin(\theta/2)$ als Funktion von E_0 und b . **(2 Punkte)**
- e) Berechnen Sie den differentiellen Wirkungsquerschnitt $\sigma(\theta)$ sowie den totalen Wirkungsquerschnitt σ_{tot} . **(2 Punkte)**