9. Übungsblatt zur Vorlesung Theoretische Physik I (Mechanik)

Abgabe: Mittwoch, 15.Januar 2003 in den Übungen.

Aufgabe A22: *Hamiltonfunktion, Hamiltonsche Gleichungen: Perle auf rotierendem Draht*

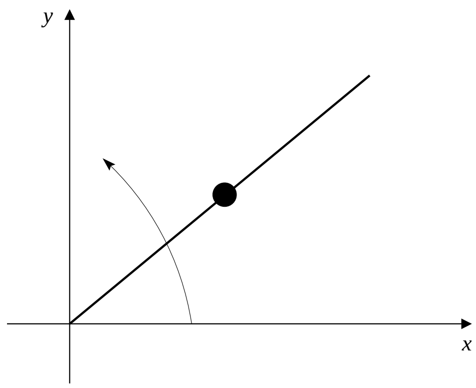
Eine Perle mit der Masse m gleite reibungsfrei auf einem Stab der Länge $2l$, der mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω in der horizontalen Ebene rotiert. Die Perle werde zum Zeitpunkt $t = 0$ in der Mitte des Stabes losgelassen.

a) Betrachten Sie die Phase der Bewegung, bevor die Perle den Stab verlässt. Stellen Sie die Hamiltonfunktion und die zugehörigen Hamiltonschen Gleichungen auf und lösen Sie diese. Benutzen Sie dazu ebene Polarkoordinaten.

b) Zeigen Sie explizit, dass die in a) aufgestellte Hamiltonfunktion H eine Erhaltungsgröße ist. Kann man H mit der Gesamtenergie identifizieren ?

c) Wie lange braucht die Perle, bis sie den Stab verlässt und mit welcher Geschwindigkeit tut sie das ?

(5 Punkte)



Aufgabe A23: *Phasenraum: Freier Fall und harmonischer Oszillator*

a) Skizzieren Sie die Bahnen im Phasenraum für den freien Fall eines Teilchens mit der Masse m im homogenen Gravitationsfeld der Erde (nahe der Erdoberfläche).

b) Geben Sie die Hamiltonfunktion eines eindimensionalen harmonischen Oszillators der Masse m und der Kreisfrequenz ω_0 an. Bei fester Energie durchläuft das System im Phasenraum $p = p(q)$ eine Ellipse. Welche Energiestufen sind nur noch erlaubt, wenn das Integral über die Ellipse im Phasenraum

$$\oint p(q)dq = nh$$

ein ganzzahliges Vielfaches des Planckschen Wirkungsquantums h sein muß ?

(4 Punkte)

Aufgabe A24: *Poisson-Klammer*
In der Vorlesung haben Sie die Poisson-Klammer

$$\{A, B\} = \sum_{i=1}^{F} \left(\frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial B}{\partial q_i} \right)$$

kennengelernt. Zeigen Sie die folgenden Identitäten:

a) $\{A, B\} = -\{B, A\}$

b) $\{A, B + C\} = \{A, B\} + \{A, C\}$

c) $\{A, BC\} = \{A, B\}C + B\{A, C\}$

d) $\{A, \{B, C\}\} + \{B, \{C, A\}\} + \{C, \{A, B\}\} = 0$ (Jakobi-Identität).

e) Seien nun A und B erhaltene Größen. Zeigen Sie, dass dann auch $\{A, B\}$ eine erhaltene Größe ist.

(6 Punkte)

Sir William Rowan Hamilton

Er wurde am 4.August 1805 in Dublin geboren und starb am 2.September 1865 in Dunsink.

Hamilton war ein Wunderkind mit fabelhafter Begabung für Sprachen und Mathematik. Schon als Kind lernte er 13 Sprachen, darunter Arabisch und Sanskrit. Mit 22 Jahren wurde er 'Royal Astronomer of Ireland', Leiter der Sternwarte und Professor der Astronomie in Dublin.

Als Forscher beschäftigte er sich anfangs mit **geometrischer Optik**. Rein theoretisch sagte er voraus, daß in zweiachsigen Kristallen eine konische Refraktion des Lichtes möglich sei, was sich bestätigte. Die in der Optik gewonnenen Methoden wandte er auf die analytische Mechanik an, wo er das **'Hamiltonsche Prinzip'** einführte, das für die Himmelsmechanik Bedeutung gewann. Er zeigte, daß aus der Wellenoptik durch einen mathematischen Grenzübergang die - nur für kleine Wellenlängen gültige - geometrische Optik gewonnen werden kann. Da er diese mit der klassischen Mechanik in Parallele setzte, fand Schrödinger hier den Ansatzpunkt, die volle Analogie zwischen Mechanik und Optik herauszustellen, d.h. eine der Wellenoptik entsprechende **'Wellenmechanik'** zu begründen.

Von 1833 beschäftigte Hamilton sich praktisch ausschließlich mit **reiner Mathematik**. Er studierte die Lösung algebraischer Gleichungen fünften Grades. Vor allem aber versuchte er das Rechnen mit komplexen Zahlen von der Ebene auf den Raum zu übertragen. Dafür eigneten sich die **Quaternionen**, viergliedrige Zahlen, die er von 1843 an erforschte und in zwei großen Bänden darstellte.

Quelle: http://www.chemie.uni-bremen.de/stohrer/biograph/hamilton.htm bzw.
Armin Hermann 'Lexikon - Geschichte der Physik A-Z', Aulis-Verlag Deubner & Co KG 1978