Universität Heidelberg SS 2009

1. Präsenzübung zur Vorlesung Quantenmechanik (PTP 4)

Die Präsenzübung wird in den Übungen am 7. und 8. April 2009 unter Anleitung des/r Tutors/in gemeinsam bearbeitet.

Für die aktive Mitarbeit gibt es **2 Punkte** !

Aufgabe P1:
In der Vorlesung wurde das Skalarprodukt zweier Zustandsvektoren eines Zweizustandssystems definiert:
$\langle\varphi|\psi\rangle = (\varphi_1^*, \varphi_2^*)\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix} = \varphi_1^*\psi_1 + \varphi_2^*\psi_2.$
Zeigen Sie $\langle\psi|\varphi\rangle = (\langle\varphi|\psi\rangle)^*$.

Aufgabe P2:

Man betrachte den Spin-Vektor

$$\hat{\vec{S}} = \frac{\hbar}{2}\,\vec{\tau}$$

mit den Pauli-Matrizen

$$\hat{\tau}_1 = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \qquad \hat{\tau}_2 = \begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix} \qquad \hat{\tau}_3 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

a) Berechnen Sie $\langle\hat{S}_y\rangle$ für den Zustandsvektor $|\varphi\rangle = \begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$.

b) Berechnen Sie $\langle\hat{S}_z\rangle$ für den Zustandsvektor $|\varphi\rangle = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$.

c) Berechnen Sie $\langle\hat{S}_z\rangle$ für den Zustandsvektor $|\varphi\rangle = \begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$.

d) Berechnen Sie $\langle\hat{S}_z\rangle$ für den Zustandsvektor $|\varphi\rangle = \begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$.

Aufgabe P3:
Berechnen Sie (durch Matrizenmultiplikation) den Kommutator

$$\left[\hat{S}_x\,,\,\hat{S}_y\right] = \hat{S}_x\hat{S}_y - \hat{S}_y\hat{S}_x$$

Aufgabe P4: Eigenwertproblem

Lösen Sie das Eigenwertproblem der selbstadjungierten Matrix

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$

Verifizieren Sie, dass die Eigenvektoren orthogonal sind und normieren Sie diese auf eins !

Aufgabe P5: Lineare Operatoren

Zeigen Sie: Besitzt ein linearer Operator A die Eigenschaft $AA^+ = A^+A$ und ist $|a\rangle$ mit $\langle a|a\rangle = 1$ Eigenvektor von A zum Eigenwert a, so ist $|a\rangle$ auch Eigenvektor von A^+ und der zugehörige Eigenwert von A^+ ist a^*.