Universität Heidelberg SS 2009

3. Präsenzübung zur Vorlesung Quantenmechanik (PTP 4)

Die Präsenzübung wird in den Übungen am 21. und 22. April 2009 unter Anleitung des/r Tutors/in gemeinsam bearbeitet.

Für die aktive Mitarbeit gibt es **2 Punkte** !

Aufgabe P8: *Fourier-Transformation*
Die Fourier–Transformation einer Funktion $\phi(x)$ ist gegeben durch

$$\hat{\phi}(k) = \mathcal{F}[\phi(x); k] = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-ikx} \phi(x)\,.$$

Die inverse Transformation ist dann

$$\phi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} \hat{\phi}(k)\,.$$

Seien ϕ, ψ Funktionen und $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $a \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie folgende Eigenschaften der Fourier–Transformation:

$$\begin{array}{ll} (a) & \mathcal{F}[\alpha\phi(x) + \beta\psi(x); k] = \alpha\mathcal{F}[\phi(x); k] + \beta\mathcal{F}[\psi(x); k] \\ (b) & \mathcal{F}[\phi(x-a); k] = e^{-ika}\mathcal{F}[\phi(x); k] \\ (c) & \mathcal{F}[\phi(ax); k] = a^{-1}\mathcal{F}[\phi(x); k/a],\ a > 0 \\ (d) & \mathcal{F}[\phi(-x); k] = \mathcal{F}[\phi(x); -k] \end{array}$$

Aufgabe P9: **δ-Funktion**
Die Θ-Funktion ist gegeben durch:

$$\Theta(x-a) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x < a \\ \frac{1}{2} & \text{für} \quad x = a \\ 1 & \text{für} \quad x > a \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass die Ableitung der Θ-Funktion die Eigenschaften der δ-Funktion besitzt:

$$\delta(x-a) = 0 \qquad \text{für } x \neq a. \qquad \int_A f(x)\delta(x-a)dx = f(a) \quad \text{für } a \in A.$$

(b) Zeigen Sie die folgenden Beziehungen:

$$\begin{aligned} &\delta(-x) = \delta(x) \\ &x\delta(x) = 0 \\ &x\delta'(x) = -\delta(x) \\ &\delta(bx) = b^{-1}\delta(x) \quad \text{für} \quad b > 0 \end{aligned}$$

wobei diese Identitäten nur innerhalb von Integralen gelten in dem Sinne, dass $g(x) = h(x)$ genau dann wenn $\int f(x)g(x)dx = \int f(x)h(x)dx$.