11. Übungsblatt zur Vorlesung Quantenmechanik

Abgabe: Dienstag 23.06 bzw. Mittwoch 24.06.2009 in den Übungen.

Aufgabe 28 *Paritätsoperator* **(9 Punkte)**

Betrachten Sie zunächst ein Teilchen mit einem Freiheitsgrad $x \in \mathbb{R}$. Der Operator $\hat{\Pi}$, der im Zustandsraum $\mathcal{H}$ des Teilchens der Koordinatentransformation $x' \equiv \mathcal{P}x := -x$ zugeordnet ist, kann formal durch seine Wirkung im Basissystem der Eigenzustände $|x\rangle$ des Ortsoperators $\hat{X}$ gemäß $\hat{\Pi}|x\rangle := |\mathcal{P}x\rangle = |-x\rangle$ definiert werden. $\hat{\Pi}$ wird als *Paritätsoperator* bzw. auch als Spiegelungsoperator bezeichnet. Zeigen Sie, dass

a) $\hat{\Pi}^{-1} = \hat{\Pi}^{\dagger} = \hat{\Pi}$ gilt; **(2 Punkte)**

b) $\hat{\Pi}$ nur die Eigenwerte $\pi = +1, -1$ besitzen kann; **(1 Punkt)**

c) $\langle u|\hat{T}|v\rangle = 0$ ist, falls $|u\rangle$ und $|v\rangle$ Eigenvektoren von $\hat{\Pi}$ zum selben Eigenwert π sind, und $\hat{T}$ ein in $\mathcal{H}$ definierter *ungerader Operator* ist, d.h. ein Operator, für den $\hat{\Pi}\hat{T}\hat{\Pi}^{\dagger} = -\hat{T}$ gilt. **(2 Punkte)**

d) Betrachten Sie ein Teilchen in einem eindimensionalen spiegelsymmetrischen Potenzial $V(x) = \mathcal{P}V(x) = V(-x)$. Sei $\hat{H}$ der zugehörige Hamiltonoperator. Was ergibt sich dann für den Kommutator $[\hat{H}, \hat{\Pi}]$? **(2 Punkte)**

e) Im dreidimensionalen Raum führt der Paritätsoperator den Ortsvektor $\vec{x}$ in $-\vec{x}$ über: $\hat{\Pi}|\vec{x}\rangle = |\mathcal{P}\vec{x}\rangle = |-\vec{x}\rangle$ bzw. bei Anwendung auf eine Wellenfunktion $\mathcal{P}\psi(\vec{x}) = \psi(-\vec{x})$. Betrachten Sie die Kugelfunktionen $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$, die Sie von der Ortsdarstellung (in Kugelkoordinaten) der Drehimpulseigenfunktionen kennen. Sind die Funktionen $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$ Eigenfunktionen zu $\mathcal{P}$ und wenn ja, zu welchen Eigenwerten ? **(2 Punkte)**

Aufgabe 29 *Zeitunabhängige Störungsrechnung* **(8 Punkte)**

Betrachten Sie ein Teilchen der Masse m im eindimensionalen Potenzial

$$V_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 < x < L \\ +\infty & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Bestimmen Sie die (auf eins normierten) Eigenfunktionen $\psi(x)$ und die Energieeigenwerte E des zugehörigen Hamiltonoperators $\hat{H}_0$. **(2 Punkte)**

b) Welche Energieeigenwerte des zughörigen Hamiltonoperators erhält man für ein Teilchen der Masse m im Potenzial

$$V_b(x) = \begin{cases} -b & \text{für } 0 < x < L \\ +\infty & \text{sonst,} \end{cases}$$

mit der reellen Konstanten $b > 0$? **(2 Punkte)**

c) Betrachten Sie nun ein Teilchen der Masse m im Potenzial $V(x) = V_0(x) + V_1(x)$ mit

$$V_1(x) = \begin{cases} -b & \text{für } 0 < x < a \leq L \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

und den reellen Konstanten $b > 0$ und $0 < a \leq L$.
Fassen Sie $V_1(x)$ als Störung des Hamiltonoperators $\hat{H}_0$ aus Aufgabenteil a) auf und berechnen Sie die Korrektur zur Grundzustandsenergie E_0 in der ersten Ordnung Störungsrechnung. Was ergibt sich für $a = L$? Vergleichen Sie mit dem Ergebnis aus Aufgabenteil b). **(4 Punkte)**

Aufgabe 30: *Zeitunabhängige Störungsrechnung* **(10 Punkte)**
Der Hamiltonoperator eines **zweidimensionalen Oszillators** sei gegeben durch

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \hat{H}_0 + \hat{H}_1 \\ \hat{H}_0 &= \frac{1}{2m}\left(\hat{p}_1^2 + \hat{p}_2^2\right) + \frac{m\omega^2}{2}\left(\hat{x}_1^2 + \hat{x}_2^2\right) \\ \hat{H}_1 &= \gamma \frac{m^2\omega^3}{\hbar}\hat{x}_1^2\hat{x}_2^2 \qquad \text{mit } \gamma \in R^+ \end{aligned}$$

(a) Geben Sie die Lösung des Eigenwertproblems des ungestörten Hamiltonian $\hat{H}_0$ an. **(3 Punkte)**

(b) Berechnen Sie die störungstheoretische Energiekorrektur in erster und zweiter Ordnung für den Grundzustand von $\hat{H}$. **(7 Punkte)**

In den dreißiger Jahren, unter dem demoralisierenden Einfluß der quantenmechanischen Störungstheorie, reduzierte sich die Mathematik, die von einem theoretischen Physiker verlangt wurde, auf eine rudimentäre Kenntnis des lateinischen und griechischen Alphabets.
R. JOST

Aus *R.F. Streater / A.S. Wightman, PCT, Die Prinzipien der Quantenfeldtheorie, BI 1996*