12. Übungsblatt zur Vorlesung Quantenmechanik

Abgabe: Dienstag 30.06 bzw. Mittwoch 01.07.2009 in den Übungen.

Hinweis: Wie bereits in der Vorlesung angekündigt, werden die Punkte der Aufgabe 27 als Zusatzpunkte gewertet.
Achtung: Die 2. Klausur findet am Samstag, dem 04.07.09 von 09.30 Uhr bis 11:30 Uhr im HS 1 und HS 2, INF 227 (KIP) statt.

Aufgabe 31: *Zweizustandssystem (again)* **(7 Punkte)**
Betrachten Sie ein NH_3-Molekül: Bei einer Messung kann sich das N-Atom oberhalb oder unterhalb der von den drei H-Atomen aufgespannten Ebene befinden. Wir beschreiben die Messgröße "Position des N-Atoms" durch den Operator

$$\hat{\Sigma} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Die Messgröße kann die Werte 1 (N-Atom oben) oder -1 (N-Atom unten) annehmen. Die entsprechenden Eigenzustände von $\hat{\Sigma}$ sind

$$|\Psi_u\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad |\Psi_d\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Der Hamiltonoperator des Systems hat in der Basis dieser beiden Zustände die Form

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} E & W \\ W & E \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie die (normierten) Energieeigenzustände und die zugehörigen Energien. **(3 Punkte)**

b) Das Molekül sei zum Zeitpunkt $t = 0$ im Zustand $|\psi_u\rangle$. Berechnen Sie den Erwartungswert von $\hat{H}$ für beliebiges t. **(2 Punkte)**

c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, das N-Atom bei einer Messung zum Zeitpunkt t oben bzw. unten zu finden. Geben Sie die Zeitentwicklung des Erwartungswertes von $\hat{\Sigma}$ an.**(2 Punkte)**

Aufgabe 32: *Ortsdarstellung und Impulsdarstellung* **(9 Punkte)**
Betrachten Sie die zeitunabhängige Schrödingergleichung für ein Teilchen der Masse m in einem Potenzial $V(x)$ (eindim. Bewegung)

$$\left(\frac{\hat{P}^2}{2m} + V(\hat{Q})\right)|u\rangle = E|u\rangle$$

in der Impulsdarstellung

$$\frac{p^2}{2m}\langle p|u\rangle + \langle p|V(\hat{Q})|u\rangle = E\langle p|u\rangle$$

a) Zeigen Sie, dass man für die Wellenfunktion $v(p) = \langle p|u\rangle$ der Impulsdarstellung die formale Integralgleichung

$$\frac{p^2}{2m}v(p) + \int_{\mathbf{R}} dp' K(p-p')v(p') = Ev(p) \qquad (*)$$

mit der Kernfunktion

$$K(p-p') := \frac{1}{2\pi\hbar}\int_{\mathbf{R}} dx\, V(x) \exp\left[-\frac{i}{\hbar}(p-p')x\right]$$

erhält (vorausgesetzt, dass das Integral in der Definition der Kernfunktion existiert).
(2 Punkte)
Hinweis: Benutzen Sie die Vollständigkeitsbeziehung der Impulseigenzustände und die Spektraldarstellung von $V(\hat{Q})$.

b) Betrachten Sie jetzt ein Teilchen der Masse m in dem anziehenden δ-förmigen Potenzial

$$V(x) = -\frac{\hbar^2}{m}D\delta(x) \quad , \quad D > 0$$

Lösen Sie für dieses Potenzial die Gleichung (*) für $E < 0$ und zeigen Sie, dass es nur dann eine nichttriviale Lösung gibt, wenn $E = -\frac{\hbar^2 D^2}{2m}$ gilt. Wie lautet die normierte Wellenfunktion $v(p) = \langle p|u\rangle$ der Impulsdarstellung für diesen gebundenen Zustand ?
(4 Punkte)

c) Berechnen Sie aus $v(p)$ die zugehörige Wellenfunktion $u(x) = \langle x|u\rangle$ der Ortsdarstellung.
(3 Punkte)

Hinweis:

$$\int_R \frac{dx}{(x^2+\alpha^2)^2} = \frac{\pi}{2\alpha^3} \, , \qquad \int_R dx\, \frac{e^{i\beta x}}{x^2+\alpha^2} = \frac{\pi}{\alpha}e^{-\alpha|\beta|} \, , \quad \alpha \in \mathbb{R}^+, \, \beta \in R$$

Aufgabe 33: *Zeitabhängige Störungsrechnung* **(6 Punkte)**
Ein geladener harmonischer Oszillator (Ladung q, Masse m, Kreisfrequenz ω) befinde sich zur Zeit $t_0 = -\infty$ in seinem Grundzustand. Im Zeitintervall $(-\infty, +\infty)$ werde er der Wirkung eines zeitabhängigen homogenen elektrischen Feldes ausgesetzt:

(a)

$$E(t) = \frac{A}{\tau_0}e^{-\frac{t^2}{\tau_0^2}}$$

(b)

$$E(t) = \frac{A}{\tau_0}e^{-i\Omega t - \frac{|t|}{\tau_0}}$$

Man berechne für beide Fälle in erster Ordnung zeitabhängiger Störungstheorie die Wahrscheinlichkeit dafür, den Oszillator zur Zeit $t = +\infty$ in seinem n-ten Energieeigenzustand $(n \neq 0)$ anzutreffen. Diskutieren Sie die Ergebnisse.