2. Übungsblatt zur Vorlesung PTP 4 (Quantenmechanik)

Abgabe: Dienstag, 21. April bzw. Mittwoch, 22. April in den Übungen.

Aufgabe 4: *Basiswechsel* **(6 Punkte)**

Durch $\{|a_1\rangle, |a_2\rangle\}$ sei in einem zweidimensionalen komplexen Hilbertraum eine orthonormierte Basis gegeben (Basis der $\{a\}$-Darstellung). In den Präsenzübungen haben Sie bereits gezeigt, dass die Vektoren

$$|b_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|a_1\rangle + i|a_2\rangle\right) \qquad |b_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|a_1\rangle - i|a_2\rangle\right)$$

auch eine orthonormierte Basis bilden (Basis der $\{b\}$-Darstellung).

a) Sei $\hat{U}$ der unitäre Operator, der den Basiswechsel (Übergang von der $\{a\}$-Darstellung zur $\{b\}$-Darstellung) vermittelt:

$$|b_1 >= \hat{U}|a_1 > \qquad \text{und} \qquad |b_2 >= \hat{U}|a_2 >$$

Welche Matrix ist diesem Operator $\hat{U}$ in der $\{a\}$-Darstellung zugeordnet? **(2 Punkte)**

b) Ein Vektor $|\psi >$ sei in der $\{a\}$-Darstellung gegeben durch

$$|\psi >= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|a_1 > + |a_2 >\right) \qquad .$$

Welche Komponenten hat $|\psi >$ in der $\{b\}$-Darstellung, d.h. schreiben Sie $|\psi >$ als Linearkombination der Basisvektoren $|b_k >$. **(2 Punkte)**

c) Ein linearer Operator $\hat{T}$ sei in der $\{a\}$-Darstellung durch die Matrix

$$\mathbf{T}^{(\mathbf{a})} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Wie lautet die Matrix $\mathbf{T}^{(\mathbf{b})}$ von $\hat{T}$ in der b-Darstellung ? **(2 Punkte)**

Aufgabe 5: *Neutrino-Oszillation* **(9 Punkte)**

In dieser Aufgabe betrachten wir die Oszillation zwischen Elektron-Neutrinos ν_e und Myon-Neutrions ν_μ. Wir nehmen an, dass die Massen der Neutrions so klein sind, dass man die Energie E der Neturinos durch ihren Impuls p und ihre Masse m folgendermaßen ausdrücken kann:

$$E = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} \approx pc + \frac{m^2c^4}{2pc}.$$

Weiterhin nehmen wir an, dass die Neutrinos sich in guter Näherung mit Lichtgeschwindigkeit c bewegen. Sei nun $\hat{H}$ der Hamiltonoperator der freien Neutrinos mit Impuls p. Seien weiterhin $|\nu_1\rangle$ und $|\nu_2\rangle$ die zwei Eigenzustände von $\hat{H}$:

$$\hat{H}|\nu_j\rangle = E_j|\nu_j\rangle \qquad E_j = pc + \frac{m_j^2c^4}{2pc}, \qquad j = 1, 2$$

Dabei sind m_1 und m_2 die Massen der Zustände $|\nu_1\rangle$ und $|\nu_2\rangle$. Wir nehmen an, dass m_1 und m_2 verschieden sind. Neutrino-Oszillationen haben ihre Ursache in dem quantenmechanischen Effekt, dass die z.B. in Reaktoren erzeugten bzw. in Detektoren nachgewiesenen Neutrinos nicht die Eigenzustände $|\nu_1\rangle$ und $|\nu_2\rangle$ von $\hat{H}$ sind, sondern Linearkombinationen von diesen:

$$|\nu_e\rangle = |\nu_1\rangle\cos(\theta) + |\nu_2\rangle\sin(\theta), \qquad |\nu_\mu\rangle = -|\nu_1\rangle\sin(\theta) + |\nu_2\rangle\cos(\theta)$$

Dabei ist θ der sogenannte Mischungswinkel, welcher experimentell bestimmt werden muß.

a) Zur Zeit $t = 0$ werde ein Neutrino im Zustand $|\nu_e\rangle$ mit Impuls p erzeugt. Berechnen Sie den Zustand $|\nu(t)\rangle$ zur Zeit t in der Basis $|\nu_1\rangle, |\nu_2\rangle$, d.h. schreiben Sie diesen als Linearkombination von $|\nu_1\rangle$ und $|\nu_2\rangle$. **(2 Punkte)**

b) Die Wahrscheinlichkeit $P_e(t)$ das Neutrino zum Zeitpunkt t im Zustand $|\nu_e\rangle$ zu finden ist gegeben durch $P_e(t) = |\langle\nu_e|\,\nu(t)\rangle|^2$. Zeigen Sie, dass

$$P_e(t) = 1 - \sin^2(2\theta)\sin^2\left(\frac{\pi c t}{L}\right)$$

mit der sogenannten Oszillationslänge $L = \frac{4\pi\hbar p}{|\Delta m^2|c^2}$ und $\Delta m^2 = m_1^2 - m_2^2$. **(4 Punkte)**

c) Berechnen Sie die Oszillationslänge L für eine Energie von $E \approx pc = 4\text{MeV}$ (mittlere Energie von Reaktorneutrinos) und eine Massendifferenz von $\Delta m^2 c^4 = 10^{-4}\,\text{eV}^2$. **(1 Punkt)**

d) Der Neutrinofluß werde mit einem Detektor in einer Entfernung l von der Neutrinoquelle gemessen. Drücken Sie P_e als Funktion der Entfernung l aus. **(1 Punkt)**

e) Aus einer Vielzahl von Experimenten erhält man $|\Delta m^2|c^4 = 7.1(\pm 0.4)\cdot 10^{-5}\,\text{eV}^2$ und $\tan^2(\theta) = 0.45(\pm 0.02)$. Zeigen Sie, dass diese Werte mit dem Datenpunkt des KamLAND Experiments (siehe Abbildung, rechnen Sie mit $l = 180\,\text{km}$ und $E = pc \approx 4\,\text{MeV}$) konsistent sind. **(1 Punkt)**
Zum KamLAND Experiment siehe z.B. **http://kamland.lbl.gov/** sowie **http://www.pro-physik.de/Phy/leadArticle.do?laid=5437**