4. Übungsblatt zur Vorlesung Quantenmechanik

Abgabe: Dienstag 05.05 bzw. Mittwoch 06.05.2009 in den Übungen.

Aufgabe 10: *Basiswechsel* **(10 Punkte)**

Wir betrachten die Diskretisierung der Wellenfunktion eines kräftefreien Teilchens (eindimensionales Problem) $\psi(x)$ auf einem endlichen, eindimensionalen Gitter mit N Gitterpunkten und einem Gitterabstand von $\Delta x = a$. Es sei $N \in \mathbb{N}$ gerade. Es ergeben sich folgende Entsprechungen:

kontinuierliche Beschreibung	diskretes, endliches 1. dim Gitter
Eigenwerte des Ortsoperators x	$ma \quad , \quad m = 0, 1, ..., N-1$
Eigenzustand des Ortsoperators $\|x\rangle$	$\frac{\|m\rangle}{\sqrt{a}}$
Wellenfunktion im Ortsraum $\psi(x)$	$\frac{\psi_m}{\sqrt{a}}$
Eigenwerte des Impulsoperators p	$\frac{2\pi\hbar}{Na}\, l \quad , \quad l = -\frac{N}{2}, -\frac{N}{2}+1, ..., \frac{N}{2}-1$
Eigenzustand des Impulsoperators p $\|p\rangle$	$\sqrt{\frac{Na}{2\pi\hbar}}\, \|l\rangle$

Der Basiswechsel von der Basis $\{|m\rangle\}$ zur Basis $\{|l\rangle\}$ wird beschrieben durch die Funktionen

$$f_l(m) \;=\; \langle m|l\rangle \;=\; \frac{1}{\sqrt{N}} \exp\left(i \frac{2\pi}{Na} lma\right) \qquad (*)$$

mit $m = 0, 1, 2, ..., N-1$ und $l = -\frac{N}{2}, -\frac{N}{2}+1, ..., \frac{N}{2}-1$

a) Zeigen Sie, dass die $f_l(m)$ sowohl in l als auch in m periodisch sind mit der Periode N. (1 Punkt)

b) Zeigen Sie $\sum_l f_l^*(m) f_l(m') \;=\; \delta_{mm'}$ (Vollständigkeit der $f_l(m)$). (2 Punkte)

c) Zeigen Sie $\sum_m f_l^*(m) f_{l'}(m) \;=\; \delta_{ll'}$ (Orthogonalität der $f_l(m)$). (2 Punkte)

d) In der Basis $\{|l\rangle\}$ wird der Impulsoperator durch die Diagonalmatrix

$$\langle l|\hat{p}|l'\rangle \;=\; \frac{2\pi\hbar}{Na}\, l\, \delta_{ll'}$$

dargestellt. Berechnen Sie nun die Matrixelemente $\langle m|\hat{p}|n\rangle$ des Impulsoperators in der Basis $\{|m\rangle\}$. Betrachten Sie anschließend den Grenzübergang $a \to 0$, $N \to \infty$ und zeigen, dass man das bekannte Ergebnis $\langle x|\hat{p}|x'\rangle = \frac{\hbar}{i}\delta'(x-x')$ erhält. Diskutieren Sie (kurz) den Zusammnhang zwischen (*) und der Fourier-Transformation.
(5 Punkte)

Aufgabe 11: *1-dim. Problem: unendlich tiefer Potenzialtopf* **(8 Punkte)**
Betrachten Sie den eindimensionalen, unendlich tiefen Potenzialtopf

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 < x < L \\ +\infty & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Bestimmen Sie die (auf eins normierten) Lösungen der zugehörigen zeitunabhängigen Schrödingergleichung, d.h. bestimmen Sie die (auf eins normierten) Eigenfunktionen $\psi(x)$ und die zugehörigen Energieeigenwerte E des zugehörigen Hamiltonoperators $\hat{H}$. (2 Punkte)
Tipp: Verwenden Sie die Randbedingung für eine unendlich hohe Potenzialschwelle (siehe Aufgabe 9 c).

b) Berechnen Sie für die Eigenfunktionen aus a) die Erwartungswerte von Ort und Impuls sowie deren mittlere quadratische Abweichung. (3 Punkte)

c) Bestimme Sie nun die (auf eins normierten) Eigenfunktionen von $\hat{H}$ für den Fall

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } -L/2 < x < L/2 \\ +\infty & \text{sonst,} \end{cases}$$

so dass ihre Symmetrieeigenschaften bzgl. Spiegelung an $x = 0$ offensichtlich werden (am einfachsten aus den Lösungen von a)). Wie ändern sich die Energieeigenwerte ? Wie ändern sich die Erwartungswerte von Ort und Impuls sowie deren mittlere quadratische Abweichung ? (3 Punkte)

Aufgabe 12: *Wahrscheinlichkeitsstromdichte* **(2 Punkte)**
Die Wellenfunktion $\psi(\vec{x}, t)$ liefert die Wahrscheinlichkeitsverteilung

$$\rho(\vec{x}, t) = |\psi(\vec{x}, t)|^2$$

dafür, dass man ein Teilchen am Ort $\vec{x}$ antrifft, d.h. $\rho(\vec{x}, t)d^3\vec{x}$ ist die Wahrscheinlichkeit ein Teilchen am Ort $\vec{x}$ im Volumenelement $d^3\vec{x}$ zu finden.
Zeigen Sie mit Hilfe der zeitabhängigen Schrödingergleichung für ein Teilchen im Potential $V(\vec{x})$, dass $\rho(\vec{x}, t)$ die *Kontinuitätsgleichung*

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(\vec{x}, t) + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{x}, t) = 0$$

mit der *Wahrscheinlichkeitsstromdichte*

$$\vec{j}(\vec{x}, t) := \frac{i\hbar}{2m} \left[\psi(\vec{x}, t)\,\vec{\nabla}\psi^*(\vec{x}, t) - \psi^*(\vec{x}, t)\vec{\nabla}\psi(\vec{x}, t)\right]$$

erfüllt.

Ganz ungebunden

Niels BOHR erhielt einen Brief von PAULI, den zu beantworten ihm schwer fiel. Er bat seine Frau, PAULI zu schreiben, er selbst werde ihm am Montag schreiben. Zwei Wochen später schrieb PAULI an Frau Bohr, wie weise BOHR gewesen sei, als er hatte mitteilen lassen, er werde Montag schreiben, aber nicht an welchem. Er brauche sich keineswegs an Montag gebunden zu fühlen.

Aus: Anna Ehlers, *Liebes Hertz !, Physiker und Mathematiker in Anekdoten*, Birkhäuser Verlag, 1994, S. 47