5. Übungsblatt zur Vorlesung Quantenmechanik

Abgabe: Dienstag 12.05 bzw. Mittwoch 13.05.2009 in den Übungen.

Aufgabe 13: *Potenzialbarriere, Tunneleffekt* **(10 Punkte)**

Ein Strom von Teilchen der Masse m und Energie E falle von links in positiver x-Richtung laufend auf die Potenzialbarriere

$$V(x) = V_0 \Theta(x) \Theta(L-x)$$

der Höhe $V_0 > 0$ und der Breite $L > 0$.

a) Wie in Aufgabe 9 kann man für die Lösung der zugehörigen zeitunabhängigen Schrödingergleichung zur Energie $E > V_0$ den Ansatz

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{ik_0 x} + re^{-ik_0 x} & \text{für} \quad x < 0 \quad \text{(Bereich I)} \\ Ae^{ikx} + Be^{-ikx} & \text{für} \quad 0 < x < L \quad \text{(Bereich II)} \\ te^{ik_0 x} & \text{für} \quad x > L \quad \text{(Bereich III)} \end{cases}$$

machen. Dabei kann man ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass die Amplitude der von links einfallenden Welle gleich 1 ist. Wie hängen k_0 und k von E und V_0 ab ? **(1 Punkt)**

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeitsstromdichten j_I und j_{III} in den Bereichen I und III als Funktion von r und t. Zeigen Sie, dass die Transmissionswahrscheinlichkeit $T := j_{\text{trans}}/j_{\text{ein}}$ gleich $|t|^2$ ist.
Anmerkung: Es ist $j_I = j_{\text{ein}} - j_{\text{refl}}$ mit j_{ein} = Wahrscheinlichkeitsstromdichte der einfallenden Teilchen, j_{refl} = Wahrscheinlichkeitsstromdichte der reflektierten Teilchen sowie $j_{III} = j_{\text{trans}}$ = Wahrscheinlichkeitsstromdichte der transmittierten Teilchen. **(1 Punkt)**

c) Berechnen Sie die Transmissionswahrscheinlichkeit T als Funktion von $\hbar, E, V_0, L$ und m für den Fall $E > V_0$. Diskutieren Sie das Ergebnis:

$$T = \frac{1}{1 + \frac{V_0^2}{4E(E-V_0)} \sin^2\left(\frac{L}{\hbar}\sqrt{2m(E-V_0)}\right)}$$

Anmerkung: Betrachten Sie bei der Diskussion insbesondere die Sonderfälle $V_0 \to 0$, $L \to 0$, $m \to 0$, $E \to \infty$ und $E \to V_0$. Wann wird $T = 1$? Skizieren Sie T als Funktion von $\kappa := \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(E - V_0)}$. Was ergibt sich für $\kappa \to 0$? **(5 Punkte)**

d) Bestimmen Sie T für den Fall $E < V_0$ (möglichst ohne viel Rechnung) und diskutieren Sie das Ergebnis. Betrachten Sie insbesondere den Grenzfall $\kappa L \gg 1$. Welches Verhalten zeigt $T(\kappa)$ in diesem Fall ? **(2 Punkte)**

e) Berechnen Sie T für Elektronen mit $E = 1\text{eV}$ bei $V_0 = 2\text{eV}$ und $L = 10^{-10}\text{m}$ sowie für Protonen derselben kinetischen Energie an der gleichen Schwelle. **(1 Punkt)**

Aufgabe 14: *Harmonischer Oszillator* **(10 Punkte)**

In der Vorlesung haben Sie die stationären Lösungen der Schrödinger Gleichung für einen harmonischen Oszillator einer Raumdimension zunächst mit der algebraischen Methode der Auf- und Absteigeoperatoren

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}\left(\sqrt{m\omega}\,\hat{Q} + \frac{i}{\sqrt{m\omega}}\,\hat{P}\right), \qquad \hat{a}^+ = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}\left(\sqrt{m\omega}\,\hat{Q} - \frac{i}{\sqrt{m\omega}}\,\hat{P}\right)$$

mit $\hat{Q} = x$ und $\hat{P} = -i\hbar\frac{d}{dx}$. bestimmt.

a) Man definiert die dimensionslose Größe $\xi := \frac{x}{x_0}$ mit $x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$
Zeigen Sie, dass $\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\xi + \frac{d}{d\xi}\right)$ und $\hat{a}^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\xi - \frac{d}{d\xi}\right)$. **(1 Punkt)**

Aus $\hat{a}|0\rangle = 0$ erhält man für die Grundzustandswellenfunktion $\psi_0(\xi)$ (siehe Vorlesung)

$$\psi_0(\xi) = (\pi)^{-\frac{1}{4}}\, e^{-\frac{1}{2}\xi^2}$$

b) Welche Bedeutung hat die Größe x_0 beim klassischen Oszillator ? **(1 Punkt)**
Tipp: Betrachten Sie einen klassischen harmonischen Oszillator mit der Gesamtenergie $E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$.

c) $|\psi_0(\xi)|^2 d\xi$ ist die Wahrscheinlichkeit, Teilchen im Intervall $[\xi, \xi + d\xi]$ zu finden. Geben Sie die Wahrscheinlichkeit an, das Teilchen im Intervall $[x, x + dx]$ zu finden ! **(1 Punkt)**

d) Zeigen Sie, dass die Wellenfunktionen zu den angeregten Energiezuständen gegeben sind durch **(4 Punkte)**

$$\psi_n(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}}\left(\frac{1}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{1}{2}\xi^2} H_n(\xi)$$

Anleitung: $\psi_n(\xi)$ ergibt sich durch wiederholte Anwendung von a^+ auf die Wellenfunktion des Grundzustandes $\psi_0(\xi)$. Beweisen und benutzen Sie die Operatorgleichung

$$e^{-\frac{\xi^2}{2}}\left(\xi - \frac{d}{d\xi}\right)^n e^{\frac{\xi^2}{2}} = (-1)^n\,\frac{d^n}{d\xi^n}$$

Benutzen Sie schließlich die in der Präsenzaufgabe P11 c) bewiesene Darstellung von $H_n(\xi)$.

e) Skizzieren und diskutieren Sie den Verlauf der ersten drei Energie-Eigenfunktionen $\psi_0(\xi), ..., \psi_2(\xi)$. **(2 Punkte)**

f) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich das Teilchen im Grundzustand ψ_0 außerhalb des klassisch erlaubten Intervalls (= Intervall zwischen den Umkehrpunkten eines klassischen harmonischen Oszillators mit Gesamternergie $E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$) aufhält ? **(1 Punkt)**
(Anmerkung: Dabei hilft: $\mathrm{erf}(1) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^1 e^{-\xi^2} d\xi = 0,8427$).