6. Übungsblatt zur Vorlesung Quantenmechanik

Abgabe: Dienstag 19.05 bzw. Mittwoch 20.05.2009 in den Übungen.

Aufgabe 15: *δ-förmiges Potenzial* **(2 Punkte)**

Befindet sich ein Teilchen der Masse m in einem Potenzial (eindimensionales Problem), welches an der Stelle $x = x_0$ längs einer kleinen Strecke sehr stark anziehend (abstoßend) ist, so kann man diesen Sachverhalt idealisiert durch

$$V(x) = -\frac{\hbar^2}{m} D\delta(x - x_0) \,+\, V_1(x)$$

darstellen, mit $D \in \mathbb{R}$ und $D > 0$ für ein anziehendes bzw. $D < 0$ für ein abstoßendes Potenzial. Dabei ist $V_1(x)$ ein in der Umgebung der Stelle $x = x_0$ stetiges Potenzial. Zeigen Sie: Unter Annahme der Stetigkeit der Wellenfunktion in der Umgebung von $x = x_0$ folgt, dass die erste Ableitung der Wellenfunktion an der Stelle $x = x_0$ einen durch

$$\lim_{x \to x_0, x > x_0} (\psi'(x)) \;-\; \lim_{x \to x_0, x < x_0} (\psi'(x)) \;=\; -2D\,\psi(x_0)$$

gegebenen Sprung besitzen muß.

Anleitung: Integrieren Sie die zeitunabhängige Schrödingergleichung über ein Intervall $x_0 - \epsilon < x < x_0 + \epsilon$ und führen Sie dann den Grenzübergang $\epsilon \searrow 0$ durch.

Aufgabe 16: *Endlich tiefer, rechteckiger Potenzialtopf* **(5 Punkte)**

Gegeben sei ein eindimensionales (endlich tiefes) Kastenpotential

$$V(x) \;=\; \begin{cases} -V_0 & \text{für} \quad |x| < a \\ 0 & \text{für} \quad |x| > a \end{cases}$$

mit $V_0 > 0$, $a > 0$. Die Wellenfunktionen $\psi_n(x)$ der gebundenen Energiezustände eines Teilchens in einem solchen inversionsinvariaten eindimensionalen Potenzial sind stets gerade oder ungerade Funktionen der Orstvariablen x.

Zeigen Sie, dass folgende Bedingungen

$$\kappa a \;=\; Ka\tan(Ka) \quad \text{für gerade Eigenfunktionen,} \tag{1}$$

$$\kappa a \;=\; -Ka\cot(Ka) \quad \text{für ungerade Eigenfunktionen,} \tag{2}$$

$$(Ka)^2 \,+\, (\kappa a)^2 \;=\; \frac{1}{\hbar^2}\, 2\, m\, V_0\, a^2\,, \tag{3}$$

mit $K = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2m(V_0 - |E|)}$ und $\kappa = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2m|E|}$

für die Energieeigenwerte $-V_0 < E < 0$ der gebundenen Zustände eines Teilchens der Masse m in diesem Potenzial gelten. Besitzt dieses Potenzial für beliebeges V_0 und a einen gebundenen Zustand ? Begründen Sie Ihre Anwort.

Anmerkung und Tipp: Skizzieren Sie die Eigenwertbedingungen in einem geeignet gewählten Koordinatensystem ($\rightarrow$ graphische Lösung).

Aufgabe 17: *Tunnelsystem* **(5 Punkte)**
Zur Erklärung der anomalen Tieftemperatureigenschaften von Gläsern werden seit Anfang der 70er Jahre sogenannte Doppelmuldenkonfigurationen in der potenziellen Energie und der Einfluß des Tunneleffekts auf das Energiespektrum solcher Konfigurationen diskutiert. Eine vereinfachte Version einer Doppelmulde ist durch das folgende Potenzial gegeben:

$$V(x) = \begin{cases} b\delta(x), & \text{für} \quad |x| \le a \\ \infty & \text{für} \quad |x| > a. \end{cases}$$

Bestimmen Sie die möglichen Energie-Eigenwerte und deren Eigenfunktionen.

Anleitung: Die Eigenfunktionen sind entweder gerade (symmetrische) oder ungerade (antisymmetrische) Funktionen der Ortskoordinate x. Im Fall der symmetrischen Eigenfunktionen erhält man für die Energie-Eigenwerte eine transzendente Bestimmungsgleichung. Eine Lösung dieser Gleichung ist **nicht** gefordert. Geben Sie jedoch anhand einer Skizze an, wie man diese Gleichung graphisch lösen könnte.

Aufgabe 18: *Harmonischer Oszillator, Besetzungszahldarstellung* **(8 Punkte)**
Betrachten Sie nochmals einen harmonischen Oszillator (siehe Aufgabe 14).

a) Drücken Sie den Ortsoperator $\hat{Q}$ und den Impulsoperator $\hat{P}$ durch die Auf- und Absteigeoperatoren $\hat{a}$ und $\hat{a}^+$ aus. **(2 Punkte)**

b) Drücken Sie die Operatoren $\hat{Q}^2$ und $\hat{P}^2$ durch die Auf- und Absteigeoperatoren $\hat{a}$ und $\hat{a}^+$ aus. **(2 Punkte)**

c) Berechnen Sie für einen Zustand $|n\rangle$, $n \in \mathbb{N}$, (Besetzungszahldarstellung !) die Erwartungswerte

$$\langle \hat{Q}^2 \rangle = \left\langle n \left| \hat{Q}^2 \right| n \right\rangle \qquad \text{und} \qquad \langle \hat{P}^2 \rangle = \left\langle n \left| \hat{P}^2 \right| n \right\rangle$$

Geben Sie die Erwartungswerte der kinetischen Energie sowie der potenziellen Energie an. **(2 Punkte)**

d) Berechnen Sie die Ortsunschärfe $\Delta\hat{Q}$ und die Impulsunschärfe $\Delta\hat{P}$ für den Zustand $|n\rangle$.
Was ergibt sich für $\Delta\hat{Q} \cdot \Delta\hat{P}$? **(2 Punkte)**

“Ich habe hundertmal so viel über Quantenprobleme nachgedacht wie über die allgemeine Relativitätstheorie.”

A. Einstein zu Otto Stern, zitiert in Pais, “Einstein, Newton und der Erfolg”