7. Übungsblatt zur Vorlesung Quantenmechanik

Abgabe: Dienstag 26.05 bzw. Mittwoch 27.05.2009 in den Übungen.

Aufgabe 19: *Drehimpuls, Matrixdarstellung* **(8 Punkte)**

In der Vorlesung haben Sie die Operatoren $L_+ = L_x + iL_y$ und $L_- = L_x - iL_y$ kennengelernt.

a) Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned} L_+L_- &= L_x^2 + L_y^2 + \hbar L_z \\ L_-L_+ &= L_x^2 + L_y^2 - \hbar L_z \end{aligned}$$

(1 Punkt)

b) Seien $|l,m\rangle$ die gemeinsamen Eigenzustände von L_z und $\vec{L}^2$ mit $L_z\,|l,m\rangle = \hbar m|l,m\rangle$ und $\vec{L}^2\,|l,m\rangle = \hbar^2 l(l+1)\,|l,m\rangle$ (siehe Vorlesung). Zeigen Sie, dass

$$L_\pm\,|l,m\rangle = \hbar\sqrt{l(l+1) - m(m\pm 1)}\,|l,m\pm 1\rangle$$

(2 Punkte)

c) Berechnen Sie die Matrixdarstellung der Drehimpulsoperatoren L_x, L_y sowie von L_+ und L_- in der Basis der Drehimpulseigenzustände $|l,m\rangle$ für $l = 1$.
Tipp: Drücken Sie L_x und L_y durch L_+ und L_- aus und benutzen Sie dann das Ergebnis aus Aufgabenteil b). **(5 Punkte)**

Aufgabe 20: *Gauss'sches Wellenpaket* **(12 Punkte)**

Anmerkung: Diese Aufgabe erfordert etwas mehr Rechenarbeit, sie ist jedoch typisch und informativ. Die auftrenden Integrale können Sie oft auf das Standardintegral

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-c(x-d)^2} = \sqrt{\frac{\pi}{c}}$$

mit den i. allg. komplexen Konstanten $c, d \in \mathbb{C}$, $Re(c) > 0$ zurückführen oder gelegentlich durch einfache Symmetrieüberlegungen berechnen.

Betrachten Sie das eindimensionale Problem eines kräftefreien Teilchens der Masse m. Die zugehörige zeitabhängige Schrödingergleichung ist dann gegeben durch

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,t) \tag{1}$$

a) Zeigen Sie, dass die (eindimensionale) ebene Welle

$$\psi(x,t) = \alpha \cdot \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left(px - \frac{p^2}{2m}t\right)\right\}$$

(mit einer Konstanten α) eine Lösung der (zeitabhängigen) Schrödingergleichung (1) ist. **(1 Punkt)**

Die allgemeine Lösung der Schrödingergleichung (1) ist dann gegeben durch eine Überlagerung von solchen ebenen Wellen

$$\psi(x,t) \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{2\pi\hbar}\,\phi(p)\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left(px - \frac{p^2}{2m}t\right)\right\} \tag{2}$$

Eine solche Überlagerung von ebenen Wellen bezeichnet man auch als *Wellenpaket.*

b) Die sogenannte Amplitudenfunktion $\phi(p)$ läßt sich aus der Anfangsbedingung $\psi(x,t=0)$ bestimmen. Geben Sie an wie! **(2 Punkte)**

Betrachten Sie nun die Amplitudenfunktion eines sogenannten (eindimensionalen) Gaußschen Wellenpaketes

$$\phi(p) \;=\; A\exp\left\{-\frac{(p-p_0)^2\,d^2}{\hbar^2}\right\} \tag{3}$$

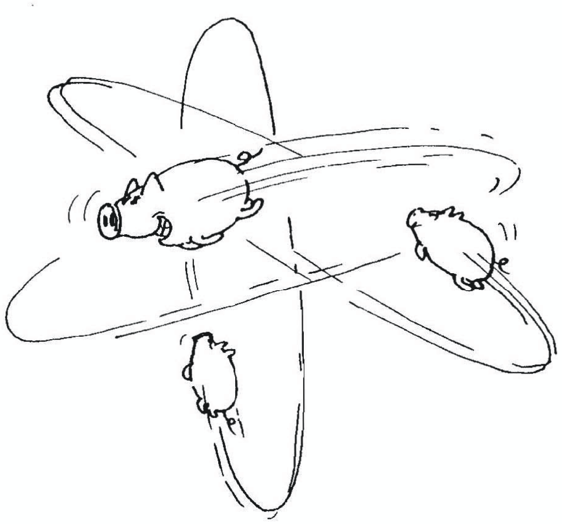
mit den Konstanten $A, d, p_0 \in \mathbb{R}$.

c) Setzen Sie diese Amplitudenfunktion in (2) ein und führen Sie die Integration aus. Berechnen Sie dann $|\psi(x,t)|^2$. **(4 Punkte)**
Benutzen Sie dabei die Abkürzungen $v = \frac{p_0}{m}$ und $\delta_t = \frac{t\hbar}{2md^2}$.

d) Bestimmen Sie die Konstante A, so dass $\int_{-\infty}^{\infty} dx|\psi(x,t)|^2 = 1$. **(1 Punkt)**

e) Berechnen Sie $< x >$ und $\Delta x = \sqrt{< (x- < x >)^2 >}$ als Funktion der Zeit. Skizzieren Sie $|\psi(x,0)|^2$ und $|\psi(x,t)|^2$ für $t > 0$ und beschreiben Sie, wie sich die Form von $|\psi(x,t)|^2$ mit der Zeit ändert. **(4 Punkte)**

Die Quanten sind doch eine hoffnungslose Schweinerei!
Max Born an Albert Einstein [1]



aus Kurt Baumann, Roman U. Sexl: Die Deutungen der Quantentheorie, Vieweg 1984, p.4