8. Übungsblatt zur Vorlesung Quantenmechanik

Abgabe: Dienstag 02.06 bzw. Mittwoch 03.06.2009 in den Übungen.

Aufgabe 21: *Laguerre Polynome* **(5 Punkte)**
In der Vorlesung haben Sie die gebundenen Zustände des Coulomb-Potenzials (ohne Spin und ohne Berücksichtigung von relativistischen Korrekturen)

$$\psi_{nlm}(r,\theta,\phi) = \psi_{nl}(r) Y_{lm}(\theta,\phi)$$

kennengelernt. Dabei ist

$$\psi_{nl}(r) = -\frac{2}{n^2}\sqrt{\frac{(n-l-1)!}{((n+l)!)^3}}\left(\frac{Z}{a}\right)^{3/2}\left(\frac{2Z}{na}r\right)^l e^{-\frac{Z}{na}r}\, L_{n+l}^{2l+1}\left(\frac{2Z}{na}r\right)$$

mit $a := \frac{\hbar^2}{me_0^2}$.
$L_n^m(x)$ sind die zugeordneten Laguerre Polynome, die gegeben sind durch

$$L_n^m(x) \;=\; \frac{d^m}{dx^m} L_n(x) \;=\; \frac{d^m}{dx^m}\left(e^x \frac{d^n}{dx^n}\left(x^n e^{-x}\right)\right)$$

mit $m, n \in \mathbb{N}_0$ und den Laguerre-Polynomen $L_n(x) \;=\; e^x \frac{d^n}{dx^n}\left(x^n e^{-x}\right)$.
Die zugeordneten Laguerre-Polynome erfüllen die Orthogonalitätsrelation

$$\frac{(n-m)!}{(n!)^3}\int_0^\infty x^m e^{-x}\, L_n^m(x)\, L_p^m(x)\, dx \;=\; \delta_{pn}$$

sowie die Differentialgleichung

$$x\,\frac{d^2y}{dx^2} \;+\; (m+1-x)\,\frac{dy}{dx} \;+\; (n-m)y \;=\; 0\,.$$

a) Berechnen Sie die zugeordneten Laguerre-Polynome $L_2^1(x)$,$L_2^2(x)$,$L_3^2(x)$, $L_3^4(x)$. **(2 Punkt)**

b) Verifizieren Sie die Orthogonaltitätsrelation für $m = 2$, $n = 2$, $p = 3$ sowie für den Fall $m = 1$, $n = 2$, $p = 2$. **(2 Punkt)**

c) Verifizieren Sie, dass $L_3^2(x)$ die oben angegebene Differentialgleichung für $m = 2, n = 3$ erfüllt. **(1 Punkt)**

Aufgabe 22: *3-dimensionaler isotroper harmonischer Oszillator* **(15 Punkte)**
Betrachten Sie ein Teilchen im dreidimensionalen Oszillatorpotenzial $V(\vec{r}) = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2$ mit $r^2 = |\vec{r}|^2$ (siehe Vorlesung). Der Hamiltonoperator des Systems ist gegeben durch

$$\hat{H} = \sum_{i=x,y,z} \hat{H}_i \qquad \text{mit} \qquad \hat{H}_i = \frac{1}{2m}\left(\hat{P}_i^2 + m^2\omega^2\hat{Q}_i^2\right)$$

mit $i = x, y, z$. Ist U_i der Zustandsraum des Variablenpaares $\hat{P}_i, \hat{Q}_i$, so ist der Zustandsraum des Gesamtsystems gegeben durch das Tensorprodukt $U = U_x \otimes U_y \otimes U_z$. Man definiert nun für jedes Variablenpaar $\hat{Q}_i, \hat{P}_i$, $i = x, y, z$ (analog zum eindimensionalen Fall, siehe Vorlesung) Leiteroperatoren $\hat{a}_i$, $\hat{a}_i^\dagger$:

$$\hat{a}_i = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}} \left(\sqrt{m\omega}\, \hat{Q}_i + \frac{i}{\sqrt{m\omega}}\, \hat{P}_i \right), \qquad \hat{a}_i^+ = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}} \left(\sqrt{m\omega}\, \hat{Q}_i - \frac{i}{\sqrt{m\omega}}\, \hat{P}_i \right)$$

Diese erfüllen die Vertauschungsrelationen

$$[\hat{a}_i, \hat{a}_j] = \left[\hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_j^\dagger\right] = 0, \qquad \left[\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger\right] = \delta_{i,j}$$

Die zugehörigen Teilchenzahloperatoren sind gegeben durch $\hat{n}_i = \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i$. Sind $|n_i\rangle$ die Eigenvektoren des Hamiltonoperators $\hat{H}_i$, so bilden $|n_x n_y n_z\rangle = |n_x\rangle |n_y\rangle |n_z\rangle$ in U ein vollständiges Orthonormalsystem.
Ist $|000\rangle$ der Eigenvektor des Grundzustandes, so ist

$$\begin{aligned} \hat{a}_x|000\rangle &= \hat{a}_y|000\rangle = \hat{a}_z|000\rangle = 0 \qquad (1) \\ |n_x n_y n_z\rangle &= (n_x! n_y! n_z!)^{-\frac{1}{2}}\, \hat{a}_x^{\dagger n_x} \hat{a}_y^{\dagger n_y} \hat{a}_z^{\dagger n_z} |000\rangle \end{aligned}$$

Aus der Vorlesung wissen Sie, dass bei einem Zentralpotenzial $\hat{H}, \hat{\vec{L}}^2$ und $\hat{L}_z$ auch einen vollständigen Satz kommutierender Observabler bilden. Die gemeinsamen Eigenvektoren sind durch die Quantenzahlen n, l und m gekennzeichnet mit den zugehörigen Eigenwerten E_n, $\hbar^2 l(l+1)$ und $\hbar m$. Die Zustände $|nlm\rangle$ ergeben sich aus den $|n_x n_y n_z\rangle$ durch unitäre Transformation.

(a) Drücken Sie die Operatoren $\hat{L}_x$, $\hat{L}_y$ und $\hat{L}_z$ durch die Operatoren $\hat{a}_i^\dagger$ und $\hat{a}_i$ $(i = x, y, z)$ aus. **(3 Punkte)**

(b) Man betrachte die Zustände mit der Energie $E = \hbar\omega(1 + \frac{3}{2})$. Die zugehörigen Eigenvektoren von $\hat{H}$ in der $|n_x n_y n_z\rangle$ Darstellung sind dann $|100\rangle$,$|010\rangle$,$|001\rangle$. Diese bilden eine Basis des Unterraumes der Eigenvektoren von $\hat{H}$ zum Eigenwert $E = \hbar\omega(1 + \frac{3}{2})$. Man gebe die Matrix an, die dem Operator $\hat{L}_z$ bezüglich dieser Basis zugeordnet ist und bestimme die zugehörigen Eigenwerte und Eigenvektoren (als Linearkombinationen der Zustände $|100\rangle$,$|010\rangle$,$|001\rangle$) von $\hat{L}_z$. **(5 Punkte)**

(c) Zeigen Sie: Die in (b) konstruierten Eigenvektoren von $\hat{L}_z$ sind auch Eigenvektoren von $\hat{\vec{L}}^2$ zum Eigenwert $2\hbar^2$ (d.h. $l = 1$). Drücken Sie dazu $\hat{\vec{L}}^2$ durch $\hat{a}_i^\dagger$ und $\hat{a}_i$ aus und wenden $\hat{\vec{L}}^2$ dann direkt auf die Eigenvektoren an. **(3 Punkte)**

(d) Geben Sie die Ortsraumdarstellung $\langle\vec{r}|100\rangle$,$\langle\vec{r}|010\rangle$,$\langle\vec{r}|001\rangle$ der Zustände an und zeigen Sie, dass die in (b) als Eigenvektoren von $\hat{L}_z$ konstruierten Linearkombinationen dieser Funktionen tatsächlich

$$\psi_{nlm}(\vec{r}) = \text{const} \quad r e^{-\frac{1}{2}\alpha^2 r^2} Y_l^m(\theta, \phi)$$

mit $l = 1$ und $m = 0, \pm 1$, $\alpha = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$ ergeben. **(4 Punkte)**