13. Übungsblatt zur Vorlesung Theoretische Physik IV (Statistische Physik und Thermodynamik)

Abgabe: Freitag, 20. Juli 2007 in den Übungen.

Aufgabe 13.1 *Ising-Modell*

Ein einfaches Modell für Magnetismus in Festkörpern ist das sogenannte Ising Modell: In diesem betrachtet man N Spins, welche wir mit s_i ($i = 1...N$) bezeichnen. Jeder Spin kann zwei Zustände annehmen $s_i = +1$ oder $s_i = -1$ ('up' oder 'down'). Das magnetische Moment eines jeden Spins ist μ_B (Bohrsches Magneton). Die Spins wechselwirken nur mit ihren direkten Nachbarn. Die Kopplungsstärke sei J. In Anwesenheit eines externen Magnetfeldes H ist der Hamiltonian dann gegeben durch

$$\mathcal{H} = -\sum_{\langle ij\rangle} J_{ij} s_i s_j - H\mu_B \sum_{i=1}^{N} s_i \quad .$$

Dabei bedeutet $\langle ij\rangle$, dass die Summe über alle Spinpaare läuft und dass $J_{ij} = J$ für direkte Nachbarn und ansonsten $J_{ij} = 0$ ist.

a) Wir betrachten zunächst den Fall $H = 0$ und $J > 0$. Bestimmen Sie den Grundzustand und deren Energie. Betrachten Sie nun den Fall $H = 0$ und $J < 0$. Bestimmen Sie wieder den Grundzustand und deren Energie.
Anmerkung: Für $J > 0$ ist das Ising Modell ein Modell für Ferromagnetismus und für $J < 0$ ein Modell für Paramagnetismus. **(2 Punkte)**

Ab jetzt nehmen wir an, dass $J > 0$ und $H \neq 0$. Die kanonische Zustandssumme ist dann

$$Z = \sum_{\{s_i\}} \exp -\beta\mathcal{H},$$

wobei die Summe für alle i über beide Werte von s_i läuft.

b) Die Magnetisierung ist gegeben durch $M = \mu_B \sum_{i=1}^{N} s_i$. Zeigen Sie, wie man die mittlere Magnetisierung $\langle M\rangle$ aus $\ln Z$ erhält. **(1 Punkt)**

c) Die magnetische Suszeptibilität $\chi = \langle \Delta M^2\rangle / kT|_{H=0}$, mit $\Delta M = M - \langle M\rangle$, ist ein Maß für die Fluktuationen der Magnetisierung in Abwesenheit eines Magnetfeldes. Zeigen Sie, dass man χ aus

$$\chi = \frac{\partial\langle M\rangle}{\partial H}\Big|_{H=0}.$$

erhällt. **(2 Punkte)**

d) Das eindimensionale Ising-Modell kann man exakt lösen (im Gegensatz zum dreidimensionalen Modell). Der Hamiltonian ist gegeben durch

$$\mathcal{H} = -J\sum_{i=1}^{N} s_i s_{i+1} - H\mu_B \sum_{i=1}^{N} s_i,$$

mit $s_i = \pm 1$. Die N Spins liegen auf einem Ring (periodische Randbedingungen) so dass $s_{N+1} = s_1$. Die Zustandssumme ist dann gegeben durch

$$Z = \sum_{s_1=\pm} \dots \sum_{s_N=\pm} K(s_1, s_2) K(s_2, s_3) \dots K(s_N, s_1),$$

mit $K(s_i, s_{i+1}) = \exp \beta[\frac{1}{2}\mu_B H(s_i + s_{i+1}) + J s_i s_{i+1}]$ (warum ?).

(i) Zeigen Sie, dass man Z schreiben kann als $Z = \mathrm{Tr}\, K^N$ mit

$$K = \begin{pmatrix} e^{L+C} & e^{-L} \\ e^{-L} & e^{L-C} \end{pmatrix}, \quad C = \beta \mu_B H, \quad L = \beta J.$$

(2 Punkte)

(ii) Warum ist die Matrix K diagonalisierbar ? Sind die Eigenwerte λ_+ and λ_- reel, imaginär, or komplex ? Berechnen Sie die Eigenwerte. **(2 Punkte)**

(iii) Zeigen Sie, dass $Z = \lambda_+^N + \lambda_-^N$. Zeigen Sie weiterhin, dass im thermodynamischen Grenzfall ($N \to \infty$) nur λ_+ ($\lambda_+ > \lambda_-$) beiträgt.

(2 Punkte)

Betrachten Sie von nun an nur den thermodynamischen Grenzfall.

(iv) Berechnen Sie die Magnetisierung $\langle M \rangle$. Kann es in einer Dimension spontane Magnetisierung geben ? Skizzieren Sie $\langle M \rangle$ als Funktion von H für verschiedene Temperaturwerte. Berechnen Sie die magnetische Suszeptibilität χ.
(2 Punkte)