4. Übungsblatt zur Vorlesung Theoretische Physik IV (Statistische Physik und Thermodynamik)

Abgabe: Freitag, 18. Mai 2007 in den Übungen.

Aufgabe 4.1:
Man betrachte ein System aus N wechselwirkungsfreien, räumlich fixierten, d.h. unterscheidbaren Spins $S = \frac{1}{2}$, die sich in einem homogenen, konstanten äußeren Magnetfeld $\vec{B} = B\,\vec{e}_z$ befinden. Der Hamilton-Operator ist dann durch

$$\hat{H} = -\sum_{i=1}^{N} \hat{\vec{\mu}}_i \cdot \vec{B} = -2\mu_B\, B \sum_{i=1}^{N} \hat{S}_i^z$$

gegeben (μ_B = Bohrsches Magneton).

Die Eigenzustände von $\hat{H}$

$$\hat{H}|\sigma_1\sigma_2...\sigma_N\rangle = -2\mu_B\, B \sum_{i=1}^{N} \hat{S}_i^z\, |\sigma_1\sigma_2...\sigma_N\rangle$$

erfüllen

$$\hat{S}_i^z\, |\sigma_1\sigma_2...\sigma_N\rangle = \sigma_i|\sigma_1\sigma_2\, ...\, \sigma_N\rangle$$

mit $\sigma_i \in \{-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\}$.

a) Geben Sie die möglichen Energiewerte E_n und deren Enartungsgrad g_n an.
. **(2 Punkte)**

b) Berechnen Sie die kanonische Zustandssumme

$$Z(T, B) = \sum_{n=0}^{N} g_n e^{-\beta E_n}$$

(2 Punkte)

c) Berechnen Sie die mittlere innere Energie des Systems

$$\bar{E} = -\frac{\partial}{\partial\beta} \ln Z$$

aus der Zustandssumme $Z(T, B)$. **(1 Punkt)**

d) Bestimmen Sie das mittlere magnetische Gesamtmoment

$$\bar{M} = \langle 2\mu_B \sum_{i=1}^{N} \hat{S}_i^z\rangle$$

Überlegen Sie sich dazu zunächst, wie man $\bar{M}$ aus der Zustandsumme Z erhält. **(2 Punkte)**

e) Berechnen Sie die Entropie des Systems

$$S(T,B) \;=\; k\,(1\,-\,\beta\frac{\partial}{\partial\beta})\;\ln Z(T,B)$$

Was ergibt sich für $S(T,B)$ im Falle $B=0$? **(2 Punkte)**

f) Überprüfen Sie, ob der 3. Hauptsatz erfüllt ist,
d.h. ob $S(T,B) \longrightarrow 0$ für $T \to 0$. **(1 Punkt)**

g) Bestimmen Sie die Entropie $S(\bar{E})$ als Funktion der mittleren inneren Energie $\bar{E}$. Eliminieren Sie dazu im oben erhaltenen Ausdruck für die Entropie die Temperatur T bzw. $\beta = \frac{1}{kT}$ und B. Führen Sie dazu die neue Variable

$$\epsilon \;:=\; \frac{\bar{E}}{N\mu_B B}$$

ein und bestimmen Sie die Entropie S als Funktion von ϵ.
Skizzieren Sie die Funktion $S(\epsilon)$. **(2 Punkte)**

h) Berechnen Sie nun die Temperatur

$$T \;=\; \left(\frac{\partial S}{\partial \bar{E}}\right)^{-1}$$

als Funktion der mittleren inneren Energie $\bar{E}$ beziehungsweise der neuen Variablen ϵ. Skizzieren Sie $T(\epsilon)$. Was ergibt sich für das Vorzeichen der Temperatur T in Abhängigkeit von ϵ ? **(2 Punkte)**

Aufgabe 4.2:
Ein Reißverschluss habe N Glieder, wobei jedes Glied einen geschlossenen Zustand mit Energie 0 und einen offenen Zustand mit Energie ϵ habe. Wir fordern zusätzlich, dass sich der Reißverschluss nur vom linken Ende her öffnen kann und dass sich ein Glied erst dann öffnen kann, wenn alle Glieder links von ihm bereits offen sind.

a) Berechnen Sie die kanonische Zustandssumme **(2 Punkte)**

b) Ermitteln Sie die mittlere Zahl offener Glieder im Grenzfall
$\frac{\epsilon}{T} \gg 1$ für eine gegebene Temperatur T **(1 Punkt)**

Dieses System ist ein einfaches Modell für die Auftrennung eines DNS-Moleküls in seine beiden Stränge.