8. Übungsblatt zur Vorlesung Theoretische Physik IV (Statistische Physik und Thermodynamik)

Abgabe: Freitag, 15. Juni 2007 in den Übungen.

Aufgabe 8.1:
Berechnen Sie den *isobaren Ausdehnungskoeffizienten* $\alpha := \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$, den *isochoren Spannungskoeffizienten* $\beta := \frac{1}{p}\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V$ und die *isotherme Kompressibilität* $\kappa_T := -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T$ für ein ideales Gas. **(2 Punkte)**

Aufgabe 8.2:
Beweisen Sie, dass aus der Existenz einer Zustandsgleichung für ein allgemeines System $f(p, V, T) = 0$ die Relation $\alpha = p \cdot \kappa_T \cdot \beta$ folgt.
(Bezeichnungen wie in Aufgabe 8.1) **(2 Punkte)**

Aufgabe 8.3:
Zeigen Sie, daß

$$\overline{\Delta N^2} = \frac{1}{\beta^2}\frac{\partial^2}{\partial \mu^2}\ln Z_{grk}(\beta, V, \mu) = \frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial \mu}\overline{N}(\beta, V, \mu).$$

mit der Großkanonischen Zustandssumme $Z_{grk}(\beta, V, \mu)$
(Beachte: Hier ist wieder $\beta = \frac{1}{kT}$). **(2 Punkte)**

Aufgabe 8.4:

a) Zeigen Sie: Gilt für 3 Größen x, y, z eine Relation

$$f(x, y, z) = 0$$

so folgt:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -1$$

(2 Punkte)

b) Die großkanonische Zustandssumme ist eine Funktion der drei Parameter β, V und μ. Alle anderen Zustandsgrößen erhält man aus dem Gibbschen Potenzial J sowie aus dessen partiellen Ableitungen. Für die vier Größen $\overline{N}$, μ, V und T muß daher eine Relation $f(\overline{N}, \mu, V, T) = 0$ gelten. Betrachten Sie diese Gleichung bei festem T und zeigen Sie, dass Sie die partielle Ableitung $\left(\partial\overline{N}/\partial\mu\right)_{V,T}$ durch Ableitungen der mittleren Teilchenzahl und des chemischen Potentials nach dem Volumen wie folgt ausdrücken können:

$$\left(\frac{\partial \bar{N}}{\partial \mu}\right)_{V,T} = -\bar{N}\frac{\left(\frac{\partial \bar{N}}{\partial V}\right)_{\mu,T}}{\left(\frac{\partial (\bar{N}\mu)}{\partial V}\right)_{\bar{N},T}}$$

(2 Punkte)

Aufgabe 8.5:
Zeigen Sie folgende Beziehung zwischen der relativen Schwankung der Teilchenzahl im großkanonischen Ensemble und der isothermen Kompressibilität κ_T :

$$\frac{\overline{\Delta N^2}}{(\bar{N})^2} = \frac{1}{N_0} RTV^{-1}\kappa_T$$

Dabei ist N_0 die Avogadro-Loschmidt-Zahl.
Anleitung:
Verwenden Sie das Resultat von Aufgabe 8.4, sowie die im thermodynamischen Limes gültige Extensivität der mittleren Teilchenzahl, um die partielle Ableitung der mittleren Teilchenzahl nach dem Volumen zu bestimmen. Benutzen Sie nun die Gibbs-Duhem-Relation $G(T, \overline{p}, \overline{N}) = \mu\overline{N}$, um die partielle Ableitung von $\mu\bar{N}$ nach dem Volumen auszuwerten. Mit der Definition der isothermen Kompressibilität

$$\kappa_T = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial \overline{p}}\right)_{\overline{N},T}$$

ergibt sich schließlich die gesuchte Beziehung. Man beachte dabei weiterhin die Beziehung zwischen der Boltzmann-Konstanten k, der Gaskonstanten R und der Avogadro-Loschmidt Zahl N_0:

$$k = \frac{R}{N_0}$$

(3 Punkte)