Stand 19.05.2004

Kap.3 Darstellungstheorie für Gruppen mit Mittelbildung

3.0 Endliche Gruppen

Satz: Für endliche Gruppen sind alle Darstellungen unitär und daher vollreduzibel.

Begründung:

Sei $\{e_i\}$ eine Basis im Darstellungsraum mit hermitischem Skalarprodukt $(e_i, e_j) = \delta_{i,j}$

Die Darstellung D(g) wird im allgemeinen bezüglich $(,)$ nicht unitär sein.

Betrachte als neues Skalarprodukt: $(u, v)_D := \frac{1}{|G|} \sum_{g' \in G} (D(g')u, D(g')v)$.

$(u, v)_D$ ist positiv definit, da $(v, v)_D = 0 \Leftrightarrow D(g)v = 0 \Leftrightarrow v = 0$

D ist unitär bezüglich $(u, v)_D$, da:

$(D(g)u, D(g)v)_D = \frac{1}{|G|} \sum_{g' \in G} (D(g)D(g')u, D(g)D(g')v) = \frac{1}{|G|} \sum_{g^{-1}g' \in G} (D(g')u, D(g')v)$

und $\sum_{g^{-1}g' \in G} = \sum_{g' \in G}$.

In einer Basis die bezüglich $(\cdot, \cdot)_D$ orthonormiert ist sind die Darstellungsmatrizen also unitär, d.h. erfüllen $U^{-1} = \bar{U}^T$. Eine gegebene Darstellung ist also immer äquivalent zu einer unitären Darstellung.

Ausschlaggebend für diese Konstruktion ist die Möglichkeit der Mittelbildung $M[f] = \sum_{g' \in G} f(g')$ für Funktionen f auf der gegebenen endlichen Gruppe G.
Diese Mittelbildung ist links und rechtsinvariant, d.h. $M[f(g\cdot)] = M[f(\cdot g)] = M[f]$
($\cdot$ ist der Platzhalter für das Funktionsargument , e.g. $f(\cdot g) : g' \to f(gg')$).

Das Konzept der Mittelbildung lässt sich auf eine gewisse Klasse von kontinuierlichen Gruppen verallgemeinern, zur der zum Bespiel die orthogonalen und die unitären Gruppen gehören. Wir werden dies an konkreten Beispielen im Laufe dieses Kapitels nachvollziehen. Zunächst wollen wir jedoch das Vorhandensein einer Mittelbildung postulieren, und die sich daraus ergebenden allgemeinen Folgerungen besprechen.

3.1 M-Gruppen, Haar-Maß

M-Gruppe :
G heisst Gruppe mit Mittelbildung oder kürzer M-Gruppe wenn es für die Funktionen f auf G eine Mittelbildung $M[f]$ mit den folgenden Eigenschaften gibt:

- linear: $M[\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(\cdot)] = \lambda_1 M[f_1(\cdot)] + \lambda_2 M[f_2(\cdot)]$
- positiv definit: $f > 0 \Rightarrow M[f(\cdot)] > 0$
- invariant: $M[f(\cdot)] = M[f(g\cdot)] = M[f(\cdot g)]$
- normiert: $f(\cdot) = 1 \Rightarrow M[f(\cdot)] = 1$

Integralbegriff, Haar-Maß:
Diese Eigenschaften entsprechen einem Integralbegriff für Funktionen auf der Gruppe mit einem Maß $d\mu(g')$ das links- und rechtsinvariant ist d.h. $d\mu(g') = d\mu(gg') = d\mu(g'g)$ erfüllt. Die Links- beziehungsweise Rechtsinvarianz legen das Maß im wesentlichen fest. Es wird üblicherweise als Gruppenmaß oder Haar-Maß bezeichnet. Die Normierungsbedingung ist dabei ganz wesentlich und hängt eng zusammen mit der Klassifikation als kompakte ($M1(\cdot) < \infty$) beziehungsweise nichtkompakte ($M1(\cdot) = \infty$) Gruppe. Durch geignete Reskalierung von M kann bei endlichem $M[1(\cdot)]$ natürlich immer $M[1(\cdot)] = 1$ erreicht werden.

Für endliche Gruppen ergibt sich für M gerade die in 3.0 verwendete Mittelung
$M[f(\cdot)] = \frac{1}{|G|} \sum_{g' \in G} f(g')$.

Beispiele für Haar-Maß:
Einfache Beispiele für das Haar-Maß sind :

kompakt: $G = U(1) = \{exp(i\varphi), \varphi \in [0, 2\pi), \quad \circ = \cdot\} \quad d\mu(\varphi) \sim d\varphi$

nichtkompakt: $G = R = \{x \in (-\infty, \infty), \quad \circ = +\} \quad d\mu(x) \sim dx$

Äquivalenz zu unitären Darstellungen :
Die Aussage der Äquivalenz zu unitären Darstellungen von 3.0 überträgt sich in voller Form auf M-Gruppen. Insbesonders garantiert dies die Vollreduzibilität der Darstellungen. Das Auftreten einer nicht vollreduziblen Darstellung der Poincare-Gruppe in 2.3 kann jetzt in Verbindung gebracht werden mit der Nichtkompaktheit dieser Gruppe. Lässt man die Raumdimensionen weg, dann reduziert sich die Poincare-Gruppe ja gerade auf das oben angeführte Beispiel der reellen Zahlen.
Es wäre ziemlich verfehlt zu erwarten, dass Darstellungen für nichtkompakte Gruppen in der Regel nicht vollreduzibel sind. Es bleibt jedoch zu klären welche Voraussetzungen für diesen Fall die Vollreduzibilität garantieren können.

3.2 Orthogonalitätsrelationen

Seien D, D' zwei irreduzible Darstellungen der Dimension d, d' einer M-Gruppe G.
Dann gilt:

$$M[D'_{l'k'}(\cdot^{-1})D_{kl}(\cdot)] = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & D' \not\sim D \\ \frac{1}{d}\delta_{k'k}\delta_{l'l} & D' = D \end{array} \right.$$

zwischen den d'^2 beziehungsweise d^2 Funktionen die durch die Matrixelemente dieser Darstellungen definiert sind.
Hierbei bedeutet $\cdot^{-1}$ die entsprechende Funktion bei g^{-1} statt g zu nehmen, und $\sim$ steht für äquivalent.

Bei unitärer Form der Darstellungsmatrizen schreibt sich dies als:

$$M[\overline{D'_{k'l'}}(\cdot)D_{kl}(\cdot)] = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & D' \not\sim D \\ \frac{1}{d}\delta_{k'k}\delta_{l'l} & D' = D \end{array} \right.$$

d.h. die Funktionen $\{D(g)_{ij}\}$ zu einem Satz von endlich endlich dimensionalen irreduziblen inäquivalenten unitären Darstellungen bilden ein orthogonales System im Vektorraum der komplexwertigen Funktionen über der Gruppe mit dem Skalarprodukt $(f_1, f_2) = M[\overline{f_1(\cdot)}f_2(\cdot)]$.

Es stellt sich die Frage ob ein kompletter Satz von solchen Darstellungen zu einem vollständigen Funktionensystem führt. Dies ist in der Tat der Fall für Gruppen mit Mittelbildung. (Peter-Weyl Theorem, Kap.3.6)

Beweis der Orthogonalitätsrelationen :
Sei $A : V \to V'$ eine lineare Abbildung zwischen den Vektorräumen der Darstellungen$D$ und D'. Durch Vor- und Nachschalten von D und D'^{-1} entstehen daraus neue Abbildungen dieser Art deren Mittelwert über die Gruppe gebildet werden kann(Mittelung der Matrixelemente).

Der Mittelwert $H = M[D'(\cdot^{-1})AD(\cdot)]$ erfüllt $D'(g)H = HD(g)$

da: $D'(g)M[D'(\cdot^{-1})..] = M[D'(g)D'(\cdot^{-1})..] = M[D'(g(\cdot^{-1}))..] = M[D'((\cdot g^{-1})^{-1})..]$

$$M[D'((\cdot g^{-1})^{-1})AD(\cdot)] = M[..AD(\cdot g^{-1}g)] = M[..AD(\cdot g^{-1}]D(g)$$

und g^{-1} wegen der Rechtsinvarianz von M in $\cdot$ absorbiert werden kann.

Für $D' \not\sim D$ folgt $H = 0$ d.h. $H_{l'l} = 0$ für die Matrixelemente, unabhängig von der Wahl von A. Die Freiheit in der Wahl von A besteht in der Beliebigkeit mit der in $A_{l'l} = \delta_{l'k'}\delta_{lk}$ die Indizes k', k gewählt werden können. Die Orthogonalitätsrelationen für $D' \not\sim D$ sind somit gezeigt.

Für $D' = D$ folgt $H = \lambda \mathbb{1}$. Wegen der Zyklizität der Spur gilt allgemein $Spur(H) = Spur(A)$ und somit $\lambda = Spur(A)/d$. Für obige durch k', k parametrisierte Wahl von A kommt $Spur(A) = \delta_{k'k}$ heraus, womit auch der $(D' = D)$ Teil der Orthogonalitätsrelationen gezeigt ist.

Die irrediblen Darstellungen von M-Gruppen sind endlich dimensional
Die für feste k, l geltende Relation $M[\overline{D_{kl}(\cdot)} D_{kl}(\cdot)] = 1/d$ ist unverträglich mit $d = \infty$ da auf der linken Seite das Integral über eine positive Funktion steht.

Endliche Gruppen haben nur endlich viele irreduzible Darstellungen
Da eine irreduzible d-dimensionale Darstellung d^2 orthogonale Funktionen beisteuert, und $|G|$ die Dimension des Vektorraums der Funktionen über G angibt, muss $\sum_{D,irred} d_D^2 \leq |G|$ gelten.

Die Zahl der irreduziblen Darstellungen ist demnach begrenzt. Die Beschränkung ist am schwächsten für abelsche Gruppen da hier die irreduziblen Darstellungen alle eindimensional sind.

Die Ungleichung ist in Wirklichkeit eine Gleichung wie wir Kapitel 3.6 sehen werden.

3.3 Charaktere

Den Charakter $\chi_D(g)$ einer Darstellung erhält man durch Bildung der Spur der Darstellungsmatrizen, d.h. $\chi_D(g) = Spur(D(g))$

Die Invarianz der Spur gegenüber Basisiwechseln bedeutet, dass äquivalente Darstellungen denselben Charakter haben.

Gleichermassen impliziert dies, dass konjugierten Gruppenelementen derselbe Wert zugewiesen wird, d.h. $\chi_D(g) = \chi_D(g'g\,g'^{-1})$

Für unitäre Darstellungen gilt ferner $\chi_D(g^{-1}) = \overline{\chi_D(g)}$ was sich für M-Gruppen sofort auf alle Darstellungen überträgt.

Für die direkte Summe von zwei Darstellungen D', D gilt:
$\chi_{D'\oplus D}(\cdot) = \chi_{D'}(\cdot) + \chi_D(\cdot)$

Orthogonalitätsrelationen für Charaktere
Durch Spurbildung ergibt sich aus den Relationen von 3.1

$$M[\overline{\chi_{D'}(\cdot)}\chi_D(\cdot)] = \begin{cases} 0 & D' \not\sim D \\ 1 & D' \sim D \end{cases}$$

Die Charaktere der irreduziblen Darstellungen einer M-Gruppe bilden also ein orthogonales System von Funktionen auf den Konjugationsklassen der Gruppe.

Folgerungen aus den Orthogonalitätsrelationen

1) χ_D charakterisiert eine irreduzible Darstellung

Seien D', D zwei irreduzible Darstellungen mit dem gleichen Charakter.
Es folgt $M[\overline{\chi_{D'}(\cdot)}\chi_D(\cdot)] = M[\overline{\chi_D(\cdot)}\chi_D(\cdot)] = 1$
Für $D' \not\sim D$ müsste jedoch 0 herauskommen.

2) $M[\overline{\chi}_{D^{(i)}}(\cdot)\chi_D(\cdot)]$ gibt an wie oft die irreduzible Darstellung $D^{(i)}$ in D vorkommt.

Seien $\{D^{(i)}\}$ die verschiedenen irreduziblen Darstellungen, die bei der Ausreduktion von D auftreten und n_i die jeweilige Häufigkeit. Aus $\chi_D(\cdot) = \sum_{D^{(i)}} n_i\chi_{D^{(i)}}(\cdot)$ folgt dann sofort aus den Orthogonalitätsrelationen dass $M[\overline{\chi}_{D^{(i)}}(\cdot)\chi_D(\cdot)] = n_i$

3) $M[|\chi_D(\cdot)|^2] = \sum_{D^{(i)}} n_i^2$

Man nützt aus dass $M[\,\overline{\chi}_D(\cdot)\chi_D(\cdot)\,] = \sum_{D^{(i)}} n_i M[\,\overline{\chi}_{D^{(i)}}(\cdot)\chi_D(\cdot)\,]$ und wendet 2) an.

4) $M[|\chi_D(\cdot)|^2] = 1 \Leftrightarrow D$ irreduzibel

Dieses Kriterium für die Irreduzibilität ist eine unmittelbare Konsequenz von 3)

3.4 Beispiel SO(3)

Darstellung D
Wir nehmen die Diskussion von Kapitel 2.1 wieder auf, hier jedoch unter dem Blickwinkel der Charaktere und der Orthogonalitätsrelationen. Da bei Drehungen nur die Winkelabhängigkeit eingeht, lassen wir die r-Abängigkeit weg und nehmen als Vektorraum die Funktionen auf der Kugeloberfläche, d.h. :
$V = \{\psi(\Omega)\}$ mit der Darstellung $D(R)\psi(\Omega) = \psi(R^{-1}\Omega)$

Charakter $\chi_{\mathbf{D}}$ von D
Die Berechnung des Charakters χ einer Darstellung der $SO(3)$ gestaltet sich einfach, da χ eine Klassenfunktion ist und jede Drehung äquivalent ist zu einer Drehung um die z-Achse.

Eine zu Drehungen um die z-Achse passende Basis ist zum Beispiel:
$\{\psi_{m,n}(\Omega) = exp(im\varphi)P_n(cos\theta), m \in \mathbb{Z}\ , n = 0, 1, ..\}$.
Wir haben $\psi_{m,n}(R(z,\omega)^{-1}\Omega) = exp(-im\omega)\psi_{m,n}(\Omega)$ und somit :
$\chi_D(R) = \sum_{m,n} exp(-im\omega) \quad$ mit $\omega = |\vec{\omega}(R)|$
Dieser Ausdruck ist leider unbrauchbar. Die Summe über m gibt 0 , so dass formal $0 \times \infty$ herauskommt. Dass Spurberechnungen von unitären Operatoren in unendlich dimensionalen Räumen problematisch sind, kommt jedoch nicht unerwartet, da die Eigenwerte eines unitären Operators alle vom Betrag 1 sind. Bei der Summe über die Eigenwerte hat man es daher notwendig mit einer nicht absolut konvergenten Reihe zu tun.

Eine geeignetere Basis sind die Kugelfunktionen $\{Y_l^m\}$. Für festes l ergibt sich :

$$\chi_l(R) = \sum_{-l\leq m\leq l} exp(-im\omega) = \frac{exp(il\omega) - exp(-i(l+1)\omega)}{1 - exp(-i\omega)} = \frac{sin((l+\frac{1}{2})\omega)}{sin(\frac{1}{2}\omega)}$$

Ausgehend vom Ausdruck in der Mitte ergibt sich durch Anwendung der Formel für die geometrische Reihe :

$$\chi_D(R) = \sum_l \chi_l(R) = \frac{2}{(1 - exp(-i\omega))(1 - exp(i\omega))} = \frac{2}{(sin(\frac{\omega}{2}))^2}$$

Haar-Maß
Wie in Kapitel 3.5 gezeigt wird ist das Haar-Maß von $SO(3)$ gegeben durch

$$M[f(.)] = \int f(R)d\mu(R)\,, \quad d\mu(R) = \frac{2}{\pi}sin^2(\frac{\omega}{2})\,d\omega\,\frac{d\hat{n}}{4\pi}\,, \quad \vec{\omega}(R) = \omega\,\hat{n}\,, \quad 0 \leq \omega \leq \pi$$

Gruppenintegrale
Die Berechnung der Gruppenintegrale gibt:

- $M[\overline{\chi_l'(\cdot)}\chi_l(\cdot)] = \delta_{l',l}\,,$

- $M[\overline{\chi_l(\cdot)}\chi_D(\cdot)] = 1$

Da χ_l gerade der Charakter der Darstellung $D^{(l)}$ ist finden wir erwartungsgemäss:

- Die Darstellungen $D^{(l)}$ sind irreduzibel und wechselseitig inäquivalent
- Jede der Darstellungen $D^{(l)}$ kommt in D genau einmal vor

Darstellungsmatrizen $\mathbf{D^{(l)}_{m',m}(R)}$

Die Orthogonalitätsrelationen für $D^{(l)}_{m',m}(R)$ sollten nicht verwechselt werden mit den Orthogonalitätsrelationen für die Kugelfunktionen. Erstere betreffen Funktionen auf der Gruppe, letztere Funktionen auf der Kugeloberfläche. Es besteht jedoch ein im folgenden hergeleiteter Zusammenhang.
Anstelle von $\vec{\omega}$, kann eine Drehung auch durch Eulerwinkel $\{\psi, \theta, \varphi\}$ gemäss

$$R(\psi, \theta, \varphi) = R(\hat{z}, \psi)R(\hat{y}, \theta)R(\hat{z}, \varphi)$$

charakterisiert werden. Die Drehung $R(\varphi, \theta, \psi)$ führt $\hat{z}$ über in den Einheitsvektor mit Raumwinkel $\Omega = (\theta, \varphi)$. Die $D^{(l)}$ definierende Beziehung

$$Y_l^m(R^{-1}\Omega) = Y_l^{m\prime}(\Omega)D^{(l)}_{m',m}(R)$$

impliziert daher

$$Y_l^m(\theta, \varphi) = Y_l^{m\prime}(0, 0)D^{(l)}_{m',m}(R^{-1}(\varphi, \theta, \psi))$$

Unter Verwendung von $Y_l^{m\prime}(0, 0) = \sqrt{(2l + 1)/4\pi}\ \delta_{m',0}$ sowie der Unitarität von $D^{(l)}$ folgt somit :

$$D^{(l)}_{m,0}(R(\varphi, \theta, \psi)) = \sqrt{\frac{2l + 1}{4\pi}}\ \overline{Y_l^m(\theta, \varphi)}$$

Damit die Orthogonalitätsrelationen für $D^{(l)}_{m',m}(R)$ und $Y_l^m(\Omega)$ verträglich sind muss das Haar-Maß in den Eulerwinkeln offenbar gegeben sein durch:

$$d\mu(\psi, \theta, \varphi) = \frac{d\psi}{2\pi}\,\frac{dcos(\theta)}{2}\,\frac{d\varphi}{2\pi}\,, \quad \psi, \varphi \in [0, 2\pi]\,, \quad \theta \in [0, \pi]$$

Dies ist in der Tat der Fall.

Der Vollständigkeit halber sei hier noch eine Formel für $D^{(l)}(R)$ angegeben, die obiges Resultat auf allgemeine Indizes ausdehnt und eine vollständige Übersicht über die Abängigkeit von den Winkeln bietet ($\zeta = sin^2(\frac{\theta}{2})$) :

$$D^{(l)}_{m',m}(R(\psi, \theta, \varphi)) = e^{-im'\psi}d^{(l)}_{m',m}(\theta)e^{-im\varphi}$$

mit

$$d^{(l)}_{m',m}(\theta) = (-1)^{m'-m}\sqrt{\frac{(l + m')!}{(l - m')!(l + m)!(l - m)!}}\zeta^{(m-m')/2}(1-\zeta)^{(-m-m')/2}(\frac{d}{d\zeta})^{l-m'}\zeta^{l-m}(1-\zeta)^{l+m}$$

3.5 Haar-Maß für SO(3) und SU(2)

Das Haar-Maß wird durch seine Invarianzeigenschaft d.h. $d\mu(g_0 g) = d\mu(g) = d\mu(g g_0)$ festgelegt, da sie das Maß in der Umgebung des Einselements mit dem Maß in der Umgebung der anderen Gruppenelemente in Beziehung setzt. Seine Bestimmung läuft daher auf die Auswertung dieser Bedingung hinaus.

Für kontinuierliche Gruppen kann man folgende allgemeine Überlegung anstellen.
Die Gruppenelemente seien durch $x = (x_1, .., x_f)$ parametrisiert wobei zweckmässigerweise $x = 0$ dem Einselement entsprechen soll. Wir schreiben $d\mu(g) = \rho(x)\, d^f x$ mit einer positiven Dichtefunktion $\rho(x)$. Der Produktbildung $g \to g' = g_0 g$ entspricht im Parameterraum die Bildung $x \to x'(x_0, x)$. Die Invarianzbedingung $\rho(x')d^f x' = \rho(x)d^f x$ hat also die Form:

$$\rho(x'(x_0, x))\, \frac{\partial(x')}{\partial(x)} = \rho(x) \qquad (^*)$$

Für $x = 0$ ist somit $\rho(x_0)$ über die Funktionaldeterminante von $x- > x'(x_0, x)$ genommen bei $x = 0$ mit $\rho(0)$ verknüpft.

Die Invarianzbedingung hat natürlich dieselbe Struktur wenn statt der Links- die Rechtsmultiplikation oder die Konjugation $g \to g_0\, g\, g_0^{-1}$ genommen wird, es sind nur jeweils die entsprechenden Funktionaldeterminanten zu nehmen.

SO(3) :
Wir gehen aus von der Parametrisierung der Drehungen durch den Drehvektor und schreiben $d\mu(\vec{\omega}) = \rho(\vec{\omega})d^3\omega$. Der Eigenschaft $R_0 R(\vec{\omega})R^{-1} = R(R_0\vec{\omega})$ entspricht auf Parameterebene $\vec{\omega} \to R_0\vec{\omega}$. Da die Funktionaldeterminante dieser Abbildung 1 ist reduziert sich die Invarianzbedingung auf $\rho(\vec{\omega}) = \rho(R_0\vec{\omega})$ d.h. ρ kann nur vom Betrag $\omega = |\vec{\omega}|$ abhängen.

Die Abhängigkeit von ω zu bestimmen fällt wesentlich schwerer. Man benötigt dazu Informationen über das Bildungsgesetz $\vec{\omega}\,'(\vec{\omega}_0, \vec{\omega})$ zu $R(\vec{\omega}_0)R(\vec{\omega}) = R(\vec{\omega}\,')$ für infitesimale $\vec{\omega}_0 = \hat{n}_0\, \delta\varphi_0$.

Eine ziemlich längliche Rechnung liefert :

$$\vec{\omega}' = \vec{\omega} + \delta\vec{\omega}\,, \quad \delta\vec{\omega} = \delta\varphi_0 \frac{1}{2} \left(\frac{\omega sin\omega}{1 - cos\omega}\, \hat{n}_0 + (-\frac{sin\omega}{1 - cos\omega} + \frac{2}{\omega})\, \frac{1}{\omega}\, (\hat{n}_0 \cdot \vec{\omega})\, \vec{\omega} + \hat{n}_0 \times \vec{\omega} \right)$$

Für die Funktionaldeterminate ergibt sich daraus zur Ordnung $\delta\varphi_0$:

$$\frac{\partial\vec{\omega}\,'}{\partial\vec{\omega}} = 1 + \delta\varphi_0 \left(\frac{2}{\omega^2} - \frac{1}{\omega}\, \frac{sin\omega}{1 - cos\omega} \right)$$

Die Längenänderung in $\omega\,' = \omega + \delta\omega$ ergibt sich aus obigem zu $\delta\omega = \hat{n}_0 \cdot \vec{\omega}/\omega\, \delta\varphi_0$. Die

Forderung (*) führt daher auf die Differentialgleichung:

$$\frac{d}{d\omega}\rho(\omega) = \rho(\omega)\left(\frac{sin\omega}{1-cos\omega} - \frac{2}{\omega}\right)$$

die durch $1/\omega^2 sin^2(\omega/2)$ gelöst wird. Die Berücksichtigung von $d^3\omega = \omega^2 d\omega\, d\hat{n}$ gibt daher das in 3.4 verwendete Maß:

$$d\mu(\vec{\omega}) = \frac{2}{\pi} sin^2(\frac{\omega}{2})\, d\omega\, \frac{d\hat{n}}{4\pi}\,, \quad \omega \in [0,\pi]$$

SU(2) :
Aus der in Kapitel 1.2 Beispiel d) beschriebenen Parametriserung von $SU(2)$ durch einen Drehvektor folgt, dass das Haar-Maß im wesentlichen das von $SO(3)$ ist, mit einem von $[0,\pi]$ nach $[0,2\pi]$ ausgedehnten Variablenbereich, d.h.:

$$U = \exp(-i\vec{\omega}\cdot\frac{\vec{\sigma}}{2})\,, \quad d\mu(\vec{\omega}) = \frac{1}{\pi} sin^2(\frac{\omega}{2})\, d\omega\, \frac{d\hat{n}}{4\pi}\,, \quad \omega = |\vec{\omega}| \in [0,2\pi]$$

Wir wollen hier jedoch eine unabhängige Herleitung vorstellen die auf den geometrischen Eigenschaften der $SU(2)$ beruht.

Die Parametrisierung:

$$SU(2) = \{U = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix}\,, \quad \alpha\overline{\alpha} + \beta\overline{\beta} = 1\,, \quad \alpha = x_1 + ix_2\,, \quad ,\beta = x_3 + ix_4\,, \quad x_i \in \mathbb{R}\}$$

zeigt, dass die Gruppenmannigfaltigkeit identisch ist zur Oberfläche (S_3) der 4-dimensionalen Einheitskugel. Da jeder Punkt $x = (x_1,..,x_4)$ dieser S_3 gleichberechtigt erscheint erwartet man, dass das Haar-Maß proportional ist zum Oberflächelement $d\sigma(x)$.

Zur Begründung sei bemerkt, dass das durch $U(x_0)U(x) = U(x'(x_0,x))$ definierte x' linear von x abhängt, d.h. sich schreiben lässt als $x' = O(x_0)x$ wo $O(x_0)$ eine 4×4 Matrix ist. $x'^2 = x^2$ verlangt, dass $O(x_0)$ eine orthogonale Matrix ist und der stetige Zusammenhang mit $O(x_0 = 0) = \mathbb{1}$ lässt nur $det(O(x_0)) = 1$ zu. Die Funktionaldeterminate $\partial x'/\partial x$ ist daher 1.

Man zeigt leicht dass in der Parametrisierung der S_3 durch $\vec{x} = (x_1,x_2,x_3)$ mit $x_4 = \pm\sqrt{1-\vec{x}^2}$ das Oberflächelement gegeben ist durch:

$$d\sigma = \frac{d^3x}{|x_4|}$$

Es bleibt die Aufgabe d^3x auszudrücken durch die Koordinaten des Drehvektors $\vec{\omega}$. Unter Verwendung von $exp(-i\vec{\omega}\cdot\frac{\vec{\sigma}}{2}) = \cos\frac{\omega}{2} - i\sin\frac{\omega}{2}\,\hat{n}\cdot\vec{\sigma}$ und ergibt sich:

$$x_1 = cos(\frac{\omega}{2})\,,\ x_2 = -sin(\frac{\omega}{2})cos(\theta)\,,\ x_3 = -sin(\frac{\omega}{2})sin(\theta)sin(\varphi)\,,\ x_4 = -sin(\frac{\omega}{2})sin(\theta)cos(\varphi)$$

wo θ, φ die Polarwinkel der Drehachse sind. Für die entsprechende Funktionaldeterminante findet man :

$$\frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(\omega, \theta, \varphi)} = \frac{1}{2}\, sin^3(\frac{\omega}{2})\, sin^2(\theta)\, cos(\varphi)$$

Wir erhalten also das Endergebnis:

$$d\mu(U(\vec{\omega})) = \frac{1}{\pi}\, sin^2(\frac{\omega}{2})\, d\omega\, \frac{d\hat{n}}{4\pi} \qquad \omega \in [0, 2\pi]$$

im Einklang mit den früheren Überlegungen.

3.6 Reguläre Darstellung, Peter-Weyl Theorem

Reguläre Darstellung
Aus der in Kapitel 3.4 betrachteten Darstellung der $SO(3)$ im Raum der Funktionen auf der Kugeloberfläche lässt sich folgendes Konstruktionsschema abstrahieren.

Es ist eine Gruppe G $[SO(3)]$ gegeben, die auf eine Menge S $[S = \{\Omega\}]$ als Transformationsgruppe $T_g : s \to T_g(s)$ $[T_R : \Omega \to R\Omega]$ wirkt. Die Wirkung auf S ist transitiv, d.h. man kommt von jedem Element von S durch Anwendung der Transformationen überall hin in S. Auf S ist ferner ein Maß $d\mu(s)$ $[d\mu(\Omega)]$ vorhanden das invariant ist unter der Wirkung der T_g d.h. $d\mu(s) = d\mu(T_g(s))$. Dann ist durch $D(g)\psi(s) := \psi(T_g^{-1}s)$ im Raum der quadrat-integrierbaren Funktionen über S eine unitäre Darstellung von G definiert.

Gruppen mit invariantem Maß liefern automatisch die Möglichkeit einer solchen Konstruktion , nähmlich mit G selbst als Menge und den Linksmultiplikationen als Transformationen. Die so gebildete unitäre Darstellung :

$$D^{reg}(g)\psi(g') := \psi(g^{-1}g')$$

wird als reguläre Darstellung bezeichnet.

Charakter der Regulären Darstellung
Die Spurberechnung führt auf eine Deltafunktion , d.h.:

$$\chi_{reg}(g) = \delta(g,e) \qquad M[f(\cdot)\delta(\cdot,e)] = f(e)$$

Zur Begründung betrachten wir den Fall einer endlichen Gruppe $G = \{g_1, g_2, ..., g_{|G|}\}$. Als Basis nehmen wir die Funktionen $\{f_{g_i}(g') = \delta_{g',g_i}\ , i = 1, ..., |G|\}$. Für $D^{reg}(g)$ ergibt sich:

$$D^{reg}(g)f_{g_i}(g') = \delta_{g^{-1}g',g_i} = f_{gg_i}(g') = \sum_j f_{g_j}(g')\delta_{g_j,gg_i}$$

Die Darstellungsmatrix zu g hat demnach nur ausserdiagonale Elemente, es sei denn dass $g = e$. Somit $\chi_{reg}(g) = |G|\delta_{g,e}$.

Dies macht plausibel dass sich im allgemeineren Fall einer M-Gruppe die besagte δ-Funktion ergeben muss.

Ausreduktion der Regulären Darstellung
Den Darstellungsgehalt von D^{reg} ermitteln wir durch Bildung der Gruppenintegrale mit den Charakteren χ_i der irreduziblen Darstellungen D^i:

$M[\overline{\chi_{reg}(\cdot)}\chi_i(\cdot)] = M[\delta(\cdot,e)\chi_i(\cdot)] = \chi_i(e) = d_i$

Jede irreduzible Darstellung kommt also in der regulären Darstellung vor und zwar mit

einer Multiplizität die durch ihre Dimension gegeben ist.
Entsprechend diesem Darstellungsinhalt ist:

$$\chi_{reg}(g) = \sum_{irred} d_i \chi_i(g)$$

Für eine endliche Gruppe folgt daraus unmittelbar das Theorem von Burnside

$$|G| = \sum_{irred} d_i^2$$

Die verschiedenen irreduziblen Darstellungen $\{D^{(i)}\}$ kommen nicht nur alle vor, sie liefern auch gleichzeitig eine Basis die die reguläre Darstellung ausreduziert. Betrachte dazu die Funktionen:

$$\left\{ f_{k,l}^{(i)}(g) = D_{k,l}^{(i)}(g^{-1})\sqrt{d_i}\,, \quad k,l = 1,..,d_i \right\}$$

Man sieht leicht dass:

$$D^{reg}(g) f_{k,l}^{(i)}(\cdot) = f_{k,l'}^{(i)}(\cdot) D_{l',l}^{(i)}(g)$$

Für jedes $k = 1,,..,d_i$ liefert $\{f_{k,l}^{(i)}\ , \ l = 1,..,d_i\}$ also eine Basis für D^i.
Die Orthogonalitätsrelationen garantieren, dass es sich hier tatsächlich um linear unabhängige Basen handelt. Wird $D_{k,l}^i$ unitär angenommen dann ist das Funktionensystem $\{f_{k,l}^i\}$ gerade orthonormiert.

Peter-Weyl Theorem
Die Erkenntnisse die wir inzwischen über die Darstellungen von M-Gruppen gewonnen haben sind im Theorem von Peter und Weyl zusammengefasst.

- Die irreduziblen Darstellungen sind endlich dimensional
- Die Darstellungsmatrizen bilden ein orthogonales System von quadrat-integrierbaren Funktionen über der Gruppe
- Die Charaktere der irreduziblen Darstellungen bilden ein orthonormiertes System von quadrat-integrierbaren Funktionen über den Äquivalenzklassen
- Jede irreduzible Darstellung kommt in der regulïen Darstellung so oft vor wie ihre Dimension beträgt.

3.7 Beispiel Fouriertransformation

Ein instruktives Beispiel zu den Aussagen des Peter-Weyl Theorems wird durch die Fourierzerlegung geliefert.

nicht-kompakt
Wir betrachten zunächst die additiven Gruppe $G = \{x, x \in \mathbb{R}\}$ der reellen Zahlen mit dem nicht-endlichen Gruppenmaß $d\mu(x) = dx$.
Die irreduziblen Darstellungen sind: $D^{(p)}(x) = exp(-ipx)\,,\ p \in \mathbb{C}$. Für reelle p sind diese Darstellungen unitär und erfüllen die Orthogonalitätsrelationen

$$\int dx \overline{D^{(p')}(x)} D^{(p)}(x) = 2\pi\delta(p - p')$$

Die reguläre Darstellung ist gegeben durch $D^{reg}(x) f(x') = f(x' - x)$.
Sie ist unitär im Raum V der quadrat-integierbaren Funktionen.
Die Ausreduktion dieser Darstellung entspricht der Fouriertransformation:

$$f(x) = \int \frac{dp}{2\pi}\, \tilde{f}(p)\, D^{(p)}(x)$$

Man beachte, dass sowohl die Form der Orthogonalitätsrelationen als auch die Form der Ausreduktion eine Verallgemeinerung der Formeln darstellen wie wir sie von M-Gruppen her kennen.

kompakt
Die vertrauten Aussagen für M-Gruppen ergeben sich nur beim Übergang auf die kompakte Gruppe $G_L = G/\{zL, z \in \mathbb{Z}\} \cong \{x \in (-L/2, L/2)\,,\ \circ = +mod\, L\}$.
Dies entspricht der Ersetzung von V durch den Raum V_L der Funktionen mit Periode L.
Das normierte Maß ist $d\mu(x) = x/L$.
Die Periodizität verlangt $D^{(p)}(x + L) = D^{(p)}(x)$. Die Möglichkeiten für p reduzieren sich daher auf $\{p = z\,(2\pi)/L\,,\ z \in \mathbb{Z}\}$, d.h. nicht-unitäre Darstellungen treten hier nicht auf.
Die Orthogonalitätsrelationen sind :

$$\int_{-L/2}^{L/2} \frac{dx}{L}\, \overline{D^{(p')}(x)}\, D^{(p)}(x) = \delta_{p',p}$$

Die Ausreduktion der regulären Darstellung entspricht gerade der Fourierreihe

$$f(x) = \frac{1}{L} \sum_{p = z\,(2\pi)/L} \tilde{f}(p)\, D^{(p)}(x)$$