Stand 15.06.2004

Kap.5 Klassische Gruppen und ihre Lie-Algebren

5.0 Invarianz-Gruppen

Die klassischen Invarianzgruppen bieten einen geeigneten Rahmen um den Begriff der Lie-Gruppe beziehungsweise der Lie-Algebra einzuführen. Sie sind einerseits als Matrixgruppen ausreichend einfach beschreibbar und decken andererseits nach der Klassifikation von Cartan-Weyl bis auf 5 Ausnahmegruppen das ganze Spektrum an Möglichkeiten für endlich dimensionale Lie-Gruppen ab.

Die klassischen Gruppen ergeben sich durch Verallgemeinerung der Invarianzbedingung die den orthogonalen beziehungsweise den unitären Matrizen zugrunde liegen:

$$O(N) = \{A \in GL(N,R), \quad (Av, Aw) = (v, w), \quad (v, w) = v^i w^i\}$$
$$U(N) = \{A \in GL(N,C), \quad (Av, Aw) = (v, w), \quad (v, w) = \overline{v}^i w^i\}$$

Die allgemeinste Bilinear- beziehungsweise Sesquilinearform ist:

$$(v, w) = \sum_{i,j=1,..,N} \eta_{i,j} v^i w^j \quad bzw. \quad (v, w) = \sum_{i,j=1,..,N} \eta_{i,j} \overline{v}^i w^j$$

Invarianzgruppe G_η zur Metrik η :
Die durch η charakterisierte Invarianzgruppe G_η ist definiert als:

$$G_\eta = \{A \in GL(N,K)\,,\, (Av, Aw) = (v, w)\}$$

wobei im Fall der Bilinearform neben $K = \mathbb{C}$ auch $K = \mathbb{R}$ in Frage kommt.
In Komponenten- beziehungsweise Matrixschreibweise lautet die Invarianzbedingung:

$$\eta_{i',j'} \overset{(-)}{A}{}^{i'}{}_i\, A^{j'}{}_j = \eta_{i,j} \quad bez. \qquad A^*\eta A = \eta\,, \quad mit \quad A^* = \overset{(-)}{A}{}^T$$

Es ist mehr oder weniger offensichtlich, dass die Gruppenaxiome für G_η erfüllt sind, d.h. dass G_η eine Untergruppe der jeweiligen allgemeinen linearen Gruppe ist. Um zu zeigen dass mit A auch A^{-1} zu G_η gehört gehen wir aus von $(Av, Aw) = (v, w)$ und definieren $v' = Av\,,\, w' = Aw$. Es folgt $(v', w') = (v, w) = (A^{-1}v', A^{-1}w')$ womit gezeigt ist, dass A^{-1} auch die Invarianzbedingung erfüllt.

Normalform der Metrik η :
Es ist zweckmässig zu untersuchen zu welchem Grad die Metrik η durch einen Basiswechsel auf eine Normalform gebracht werden kann, und dann die Diskussion auf diese Normalformen zu beschränken. Dem Basiswechsel $A \to A' = S^{-1}AS$ entspricht die Tranformation:

$$\eta \to \eta' = S^*\eta S \quad mit \quad S^* = \overset{(-)}{S}{}^T$$

Im folgenden wird für symmetrische (Kap5.1) und antisymmetrische Metriken (Kap.5.2) die Normalform bestimmt.

5.1 "Orthogonale" und "unitäre" Gruppen

Die Fälle einer Bilinearform mit reell symmetrischer Metrik beziehungsweise einer Sesquilinearform mit hermitischer Metrik können parallel behandelt werden.

Diagonalisierung :
η kann durch ein orthogonales beziehungsweise unitäres S ($S^{-1} = S^*$) auf Diagonalgestalt gebracht werden, i.e.

$$\eta = diag(\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_N)\,,\ \lambda_i \in \mathbb{R}$$

Umordnung :
Mit $S_{ij} = \delta_{p(i),j}$ kann erreicht werden, dass die Eigenwerte der Grösse nach geordnet sind, d.h. $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ..$,wobei p eine geeignete Permutation ist.

Skalierung :
Mit

$$S = diag(s_i = \frac{1}{\sqrt{|\lambda_i|}} \quad oder \quad s_i = 1 \quad falls \quad \lambda_i = 0)$$

erreicht man schliesslich die Normalform:

$$\eta = diag(1, ..., 1, 0, ..., 0, -1, ..., -1)$$

mit N_+ Einträgen 1 , N_- Einträgen -1 und N_0 Einträgen 0.

Ergebnis :
Wir haben nach dem obigen die Möglichkeiten für unterschiedliche Invarianzgruppen mit symmetrischer Metrik reduziert auf $O(N_+, N_-, N_0; K)$ im bilinearen Fall ($K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$) und $U(N_+, N_-, N_0; \mathbb{C})$ im sesquilinearen Fall. Da ein Vorzeichenwechsel von η die Invarianzgruppe nicht beeinflusst, können wir $N_+ \geq N_-$ annehmen.

Der Begriff der klassischen Invarianzgruppe wird üblicherweise auf $N_0 = 0$ eingeschränkt, obwohl Fälle mit $N_0 \neq 0$ durchaus praktische Bedeutung haben. Die Gruppe $SO(3, 0, 1; \mathbb{R})$ zum Beispiel ist gerade die Galilei-Gruppe. Diese Gruppen sind darstellbar als semidirektes Produkt $F \overset{s}{\times} N$ der entsprechenden Invarianzgruppe F zu $N_0 = 0$ d.h. $SO(3, 0, 0) = SO(3)$ im gegebenen Beispiel und einer Gruppe N die abelsche Normalteiler hat. Sie sind im Sinne der Klassifikation von Lie-Gruppen daher weder einfach noch halbeinfach. Bei der Beschränkung auf möglichst einfache Bausteine bleiben als interessante Kandidaten $O(N_+, N_-; K)$ und $U(N_+, N_-; \mathbb{C})$.

Beispiele :
$O(3, 1, \mathbb{R})$: Lorentzgruppe (nicht-kompakt).
$O(4, \mathbb{R})$: Drehgruppe in 4 Dimensionen (kompakt).
$SO(4, 2, \mathbb{R})$: Konforme Gruppe (nicht-kompakt).

5.2 Symplektische Gruppen

5.3 Lie-Algebra

Gemeinsame Eigenschaften der klassischen Gruppen

- sind Matrixgruppen, d.h. Untergruppen von entsprechenden allgemeinen linearen Gruppen.
- sind differenzierbare Mannigfaltigkeiten, d.h. die Gruppenelemente lassen sich in eineindeutiger und differenzierbarer Weise durch reelle Parameter $\{\alpha^1, .., \alpha^n\}$ beschreiben. Im allgemeinen wird dies allerdings nicht durch einen globalen Satz von Paramteren möglich sein, sondern es werden mehrere Karten benötigt.
- die durch die Gruppenmultiplikation und das Inverse definierten Abbildungen sind differenzierbar.

Wir werden diese Eigenschaften nicht weiter in Zweifel ziehen sondern sehen sie als durch die quadratische Natur der Invarianzbedingung $A^*\eta A = \eta$ gegeben an.

Vektorraum der infinitesimalen Erzeugenden
Die infinitesimalen Erzeugenden spannen den Tangentialraum zum Einselement der Gruppe auf. Im Zusammenhang der Matrixgruppen ergeben sie durch Differenzieren von $A(\alpha^1, .., \alpha^n)$ nach den Parametern an der Stelle die dem Einselement entspricht (zweckmässigerweise nach $\alpha = 0$ gelegt):

$$X_i = \frac{\partial A(\alpha^1, .., \alpha^n)}{\partial \alpha^i}|_{\alpha=0}\, , \, i = 1, ..., n$$

Die Ableitung in eine allgemeine Richtung $\alpha^i = \lambda a^i$ gibt sich dann als:

$$X = \frac{\partial A(\lambda)}{\partial \lambda}|_{\lambda=0} = a^i X_i$$

d.h. als reelle Linearkombination der linear unabhängigen Basisvektoren X_i.

Von der Invarianzbedingung her betrachtet handelt es sich bei diesem Vektorraum um die Lösungen des linearen homogenen Gleichungssystems:

$$X^*\eta + \eta X$$

Rekonstruktion der Gruppenelemente
Die Rekonstruktion der Gruppenelemente aus den Erzeugenden beruht auf der Überlegung, dass durch entsprechend vielfache Multiplikation von Elementen in der Nähe des Einselements ein endlicher Abstand überbrückt werden kann. Dies führt auf:

$$X \rightarrow \lim_{k\rightarrow\infty} (1 + \frac{X}{k})^k = exp(X)$$

Der über die Exponentialfunktion gestiftete Zusammenhang zwischen der Lie-Algebra und den Gruppenelementen gibt uns eine neue Parametrisierung, nähmlich

$$A(a^1, ..., a^n) = exp(X_i a^i)$$

Um dieses Ergebnis besser abzusichern führen wir den expliziten Beweis, dass $A = exp(X)$ die Invarianzbedingung $A^*\eta A = \eta$ erfüllt falls $X^*\eta + \eta X = 0$. Wir betrachten dazu $A(\lambda) := exp(\lambda X)$. Differenzieren nach λ führt auf :

$$\frac{dA(\lambda)}{d\lambda} = XA(\lambda) = A(\lambda)X \quad \Rightarrow \quad \frac{dA^*(\lambda)\eta A(\lambda)}{d\lambda} = A^*(\lambda)(X^*\eta + \eta X)A(\lambda) = 0$$

Somit:

$$A^*(1)\eta A(1) = A^*\eta A = A^*(0)\eta A(0) = \eta$$

Kommutator $[X, Y]$
Hinter der Parametrisierung der Gruppenelemente als $exp(X)$ verbirgt sich eine Eigenschaft der Erzeugenden die zu Tage tritt sobald Produkte betrachtet werden, d.h. $exp(X)exp(Y)$. Wir erwarten einerseits, dass das Produkt wieder in exponentieller Form d.h. als $exp(Z)$ darstellbar ist, andererseits gilt nach Baker-Campbell-Hausdorff :

$$exp(X)exp(Y) = exp\Big(X + Y + \frac{1}{2}[X, Y] + \frac{1}{12}([X, [X, Y]] + [Y, [Y, X]]) + ...\Big)$$

wobei die höheren Terme 3-fach Kommutatoren, 4-fach Kommutatoren usw. sind. Die einzige Möglichkeit die rechte Seite mit unserer Erwartung zu versöhnen besteht offenbar darin, dass der Kommutator zweier Erzeugenden wieder eine Erzeugende sein muss. Alle höheren Kommutatoren führen dann automatisch zu Erzeugenden zurück.

Eine alternative Überlegung beruht auf der Betrachtung des "Kommutatorelements" $C(A, B)$ zwischen den Elementen $A = exp(\lambda X)$ und $B = exp(\lambda Y)$ definiert als:

$$C(A, B) := A^{-1}B^{-1}AB$$

Die Entwicklung nach λ liefert:

$$C = 1 + \lambda^2[X, Y] + O(\lambda^3)$$

Der Kommutator $[X, Y]$ tritt also als Tangente an die Kurve $C(\lambda)$ auf wobei unerheblich ist, dass die Abweichung vom Einselement quadratisch in λ verläuft.

Die Abgeschlossenheit bezüglich Kommutatoren kann schliesslich auch direkt überprüft werden. Durch Ausmultiplizieren sieht man sofort, dass $[X, Y]$ die charakterisierende Eigenschaft $X^*\eta + \eta X = 0$ erfüllt falls X und Y diese erfüllen.

Axiome der Lie-Algebra
Die Eigenschaften die wir für die Erzeugenden abgeleitet haben machen $\mathbb{g}$ zu einer Lie-Algebra. Dieser Begriff ist axiomatisch wie folgt festgelegt:

- $\mathbb{g}$ ist ein reeller Vektorraum
- Es gibt eine bilineare Klammeroperation $X, Y \to c[X, Y] \in \mathbb{g}$
  die antisymmetrisch ist und die Jacobi-Identität erfüllt, d.h. :

  $$c(X, Y) = -c(Y, X) \quad , \quad c[c[X, Y], Z] + c[c[Y, Z], X] + c[c[Z, X], Y] = 0$$

Die Jacobi-Identität korrespondiert mit dem Assoziativ-Gesetz der Gruppenmultiplikation. Die Klammer $c[X, Y]$ wird oft durch $[X, Y]$ abgekürzt. Bei Matrizen handelt es sich um den üblichen Kommutator. Die Jacobi-Identität ist dann automatisch erfüllt. Dies deckt sich mit der Beobachtung, dass das Assoziativgesetz für Transformationsgruppen d.h. für die Hintereinanderausführung von Abbildungen automatisch erfüllt ist.

Beispiel $O(2, \mathbb{C})$

5.4 Adjungierte Darstellung

Darstellung ad(X) der Lie-Algebra
Über die Klammeroperation in $\mathfrak{g}$ ist jedem X eine lineare Abbildung der Lie-Algebra zugeordnet ist, nähmlich:

$$ad(X) : Y \to [X, Y]$$

wobei folgende Eigenschaften gelten:

$$ad(\lambda X) = \lambda ad(X) \quad , \quad ad(X + X') = ad(X) + ad(X')$$

$$[ad(X), ad(X')] = ad([X, X'])$$

Die Linearitätseigenschaft von $X \to (X)$ ist offensichtlich aus der Definition. Für die zweite Eigenschaft wird die Antisymmetrie und die Jacobi-Identität der Klammeroperation in $\mathfrak{g}$ benötigt:

$$[ad(X), ad(X')]Y = ad(X)ad(X')Y - ad(X')ad(X)Y = c[X, c[X', Y]] - c[X', c[X, Y]]$$

$$ad(c[X, X'])Y = c[c[X, X'], Y] = -c[c[X', Y], X] - c[c[Y, X], X']$$

Zur besseren Unterscheidung der Klammeroperation in der Lie-Algebra und dem Kommutator $[\,,\,]$ zwischen den linearen Abbildungen $ad(X)$ haben wir erstere hier als $c[\,,\,]$ geschrieben.

Mit $ad(X)$ haben wir ein Beispiel für eine Darstellung $d(X)$ der Lie-Algebra durch lineare Abbildungen eines Vektorraums wobei die Klammeroperation der Lie-Algebra in den Kommutator der Abbildungen übergeht. Im Falle der adjungierten Darstellung ist der Vektorraum die Lie-Algebra selbst. In einer Basis $\{X_i\}$ bekommt man die Matrixform:

$$ad(X_k)X_l = [X_k, X_l] = f_{kl}^m X_m$$

d.h. die Matrizen sind gerade durch die zugehörigen Strukturkonstanten gegeben.

Darstellung Ad(X) der Lie-Gruppe