Stand 15.05.2004

Übung 2.1

a) Zeige: $D(R)L_kD(R)^{-1} = L_{k'}R_{k'k}$ d.h. L_k transformiert wie Vektor
Hinweise:

schreibe $D(\vec{\omega}) := D(R(\vec{\omega}))$
begründe warum $D(R)D(\vec{\omega})D(R)^{-1} = D(R\vec{\omega})$
entwickle $D(\vec{\omega}) = exp(-i\vec{\omega}\vec{L})$ nach $\vec{\omega}$

b) Zeige, dass die über die Kugelfunktionen definierte Darstellung $D^{(1)}$ ($l = 1$) in der kartesischen Basis zur Darstellung von $SO(3)$ durch sich selbst (d.h. $R \to R$) wird.
Hinweise :

$Y_1^{\pm 1} = - \pm \sqrt{\frac{3}{8\pi}} sin\theta e^{\pm i\varphi}, \quad Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} cos\theta$
Y_1^m sind die Wellenfunktionen der Drehimpulseigenzustände $|l = 1, m >, m = 0, \pm 1$
Berechne die Wellenfunktionen der "kartesischen" Basis $|\hat{i} >$, $i = x, y, z$:
$|\hat{z} >= |1, 0 >, \quad |\hat{x} >= 1/\sqrt{2}(|1, -1 > -|1, 1 >), \quad |\hat{y} >= i/\sqrt{2}(|1, -1 > +|1, 1 >)$
und argumentiere dann an Hand der Form dieser Wellenfunktionen.

c) Betrachte die Monome 2-ten Grades $\{x_k x_l\}$ die mit den kartesischen Komponenten $\{x_k\}$ des Ortsvektors gebildet werden können.
Welche Dimension hat der erzeugte Vektorraum $\{f(\vec{r}) = c_{k,l}x_k x_l\}$?
Welche Dimension hat der Unterraum der harmonischen Monome ($\Delta f = \partial_{x_i}^2 f = 0$)?
Gebe eine einfache Basis für diesen Unterraum an.
Begründe warum dieser Unterraum invariant ist unter Drehungen.
Konstruiere mittels $x_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 \pm ix_2)$ eine neue Basis in der Drehungen um die 3-Achse diagonal sind.
Was ist der Zusammenhang mit Kugelfunktionen ?

Übung 2.2

a) Bestimme die eindimensionalen Darstellungen der Permutationsgruppe S_n.
Hinweis:

> Nütze aus, dass eine allgemeine Permutation aus Transpositionen aufgebaut werden kann und dass eindimensionale Darstellungen äquivalenten Gruppenelementen den gleichen Wert zuordnen.

b) Eindimensionale Darstellungen der allgemeinen linearen Gruppe $Gl(d, \mathbb{C})$.
Zeigen Sie, dass für ganzzahlige k die Zuordnung $A \to det(A)^k$
eine Darstellung von $Gl(d)$ ist
Können Sie begründen dass dies (und das konjugiert komplexe) die einzigen eindimensionalen Darstellungen sind?
Hinweis:

Überlegen Sie, dass man sich auf diagonale Matrizen beschränken kann. Analysieren Sie die Darstellungsbedingung für diesem Fall.