Stand 19.05.2004

Übung 3.1

a) Bestimme das Haar-Maß für die multiplikative Gruppe $G = \{r > 0\}$.
Ist G kompakt?

Übung 3.2

Das Theorem von Burnside verbindet die Zahl der Gruppenelemente mit den Dimensionen der irreduziblen Darstellungen gemäß:

$$|G| = \sum_{D,irred} d_D^2$$

a)Verfiziere das Theorem für die Untergruppe $A_3 = \{e, (123), (132)\}$ von S_3.

b) Was ergibt sich für die irreduziblen Darstellungen von S_3 ?
Hinweis:
Es gibt es 2 irreduzible eindimensionale Darstellungen (Übung 2.2a) .

c) Gibt es M-Gruppen mit $|G| = \infty$ die nur endlich viele irreduzible Darstellungen haben?

Übung 3.3

a) Bestimme die Tabelle der Charaktere von S_3, d.h. die Charaktere der verschiedenen irreduziblen Darstellungen.
Hinweis:
Mache Gebrauch von $\chi(g') = \chi(gg'g^{-1})$ und den Orthogonalitätsrelationen.

b) Bestimme die Charaktere der irreduziblen Darstellungen $D^{(l)}$ von $SO(3)$.
Hinweis:
Nütze aus, dass jede Drehung äquivalent ist zu einer Drehung um die z-Achse und dass $L_z|l, m >= |l, m > m$.

c) Berechne $M[|\chi_D(\cdot)|^2]$ für die Darstellung von $SO(2)$ durch sich selbst und interpretiere das Ergebnis

Übung 3.7

a) Geschwindigkeitstransformationen in d=1.
Man betrachte die Gruppe G der Geschwindigkeitstransformationen

$t' = \gamma(t - \beta x)\ , x' = \gamma(x - \beta t)\,, \quad \gamma = \sqrt{1/(1-\beta^2)}$.
Beantworte folgende Fragen:

- Welche Rolle spielt die Rapidität $\eta = arctanh(\beta)$ hinsichtlich der Gruppenmultiplikation.
- Zu welcher bekannten Gruppe ist G isomorph?
- Welche irrediziblen Darstellungen kommen in der Darstellung von G durch sich selbst vor.

Übung 3.8

a) Konstruiere die 2-dimensionale irreduzible Darstellung D_2 von S_3
In Übung 3.3a) ergab sich $\chi_{D_2}((ij)) = 0\,, \chi_{D_2}((ijk)) = -1$.
Mache für die Transpositionen (ij) einen Ansatz mit Matrizen die nur ausserdiagonale Elemente haben und werte die Gruppeneigenschaften aus.

Übung 3.9

a) Prüfe an Hand des Frobenius-Schur Kriteriums ob die Darstellungen $l = 1/2$ und $l = 1$ von SU(2) reell sind.
Hinweis:
Die Gruppencharaktere von $SU(2)$ berechnen sich wie die von $SO(3)$. Man benötigt nur das Verhalten von $|l, m>$ unter Drehungen um die z-Achse.

b) Begründe folgende Teile des Frobenius-Schur Kriteriums :

- χ_D reell $\Rightarrow D \sim \overline{D}$.
- D reell, irreduzibel $\Rightarrow M[\chi_D(\cdot^2)] = 1$.
- $D \not\sim \overline{D}$, irreduzibel $\quad \Rightarrow M[\chi_D(\cdot^2)] = 0$.

Hinweis:
Benütze $\chi_D(g^2) = Spur(D(g)D(g))$ und die Orthogonalitätsrelationen für irreduzible Darstellungen.