Stand 11.06.2004

Übung 5.1

a) Untersuche $O(3,0,1,\mathbb{R})$, die reelle Invarianzgruppe zur Metrik $\eta = diag(1,1,1,0)$

- Welche Form haben die Gruppenelemente ?
- Interpretiere die Wirkung auf einen Zeilenvektor ?
- Welche offensichtlichen Untergruppen gibt es ?
- Welche davon sind Normalteiler ?

Übung 5.3

a) Lie-Gruppe der Translationen
Die Translationen (hier 1-dimensional) lassen sich als Matrixgruppe auffassen:

$$\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Bestimme die Lie-Algebra und exponentiere.

b) Lie-Algebra von $SU(3)$

- Charakterisiere die Matrizen der Lie-Algebra.
- Welche Dimension hat diese Lie-Algebra ?
- Bestimme die Generatoren der drei eingebetteten $SU(2)$ Untergruppen die durch Streichen der k-ten Zeile und Spalte entstehen. Sind diese Generatoren alle unabhängig?

c) Lie-Algebra von $SL(2,\mathbb{C})$
Betrachte die Matrizen mit komplexem Drehvektor:

$$exp(-i\frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\vec{\sigma}) \quad , \quad \omega^k \in \mathbb{C}$$

Bestimme die Struktur der Lie-Algebra.
Hinweis:
Es ist zweckmässig die Generatoren zu reellem und rein imaginärem ω zu betrachten.

Übung 5.4

a) Adjungierte Darstellung von SU(2)
Die Lie-Algebra von $SU(2)$ wird aufgespannt von $X_k = (-i/2)\,\sigma_k$.
Die zugehörigen Strukturkonstanten sind $f_{kl}^{m} = \epsilon_{klm}$.
Charakterisiere die Matrizen der adjungierten Darstellung $ad(X)$ der Lie-algebra. Durch exponentieren entsteht welche klassische Gruppe?

a) Adjungierte Darstellung und Zentrum
Zeige im Rahmen der klassischen Gruppen, dass die adjungierte Darstellung $Ad(g)$ das Zentrum $Z(G)$ der Gruppe G trivial darstellt.
Zeige ferner dass $Ad(G) \cong G/Z(G)$.