Institut für Theoretische Physik | Universität Heidelberg
C. Ewerz, F. Paccetti Correia | Sommersemester 2008

12. Übung zur Elektrodynamik

Besprechung der Präsenzaufgaben: 02.07.2008
Abgabe der schriftlichen Aufgaben: 04.07.2008

S 48 Hohlwellenleiter (optional, +15 Punkte)

Wir wollen elektromagnetische Wellen in einem zylinderförmigen Hohlwellenleiter betrachten, d. h. in einem in z-Richtung unendlich ausgedehnten, hohlen Zylinder mit konstanter Querschnittsfläche. Die Wände des Zylinders sollen aus ideal leitendem Material bestehen, es soll daher im Inneren des Materials keine elektrischen und magnetischen Felder geben. Im Zylinder befinde sich ein Vakuum. Die Querschnittsfläche habe zunächst beliebige Form.
Man erwartet, daß sich elektromagnetische Wellen in z-Richtung ausbreiten können, während aufgrund der Randbedingungen in x- und y-Richtung nur stehende Wellen möglich sind.

(a) Verwenden Sie den Ansatz

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0(x,y)\, e^{i(k_z z - \omega t)}\,, \qquad \mathbf{B} = \mathbf{B}_0(x,y)\, e^{i(k_z z - \omega t)}\,, \tag{1}$$

um aus den allgemeinen Wellengleichungen für $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ im Vakuum die folgenden Gleichungen für $\mathbf{E}_0$ und $\mathbf{B}_0$ herzuleiten:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k_\perp^2\right)\mathbf{E}_0(x,y) = 0 \tag{2}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k_\perp^2\right)\mathbf{B}_0(x,y) = 0\,, \tag{3}$$

wobei $k_\perp^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - k_z^2$. Welche Ungleichung zwischen ω und $k_\perp$ muß für die Existenz von Wellen in z-Richtung erfüllt sein?

(b) Zeigen Sie, daß die Tangentialkomponente des elektrischen Feldes auf dem Rand verschwinden muß. Leiten Sie daraus her, daß die Normalkomponente des magnetischen Feldes auf dem Rand verschwinden muß.

(c) Zeigen Sie mit Hilfe der Maxwell-Gleichungen, daß für die Felder $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ des obigen Ansatzes die folgenden Relationen gelten:

$$k_\perp^2(\mathbf{e}_x E_{0,x} + \mathbf{e}_y E_{0,y}) = i k_z \nabla E_{0,z} - \frac{i\omega}{c}\,\mathbf{e}_z \times \nabla B_{0,z} \tag{4}$$

$$k_\perp^2(\mathbf{e}_x B_{0,x} + \mathbf{e}_y B_{0,y}) = i k_z \nabla B_{0,z} + \frac{i\omega}{c}\,\mathbf{e}_z \times \nabla E_{0,z}\,. \tag{5}$$

Man kann allgemein zeigen (was wir hier nicht durchführen wollen), daß sich die möglichen Wellen im Hohlwellenleiter in zwei Klassen aufteilen lassen, die man getrennt behandeln kann:

- Transversal magnetische Wellen (auch TM-Wellen, Wellen vom elektrischen Typ oder E-Wellen genannt), für die überall $B_z = 0$ (und damit $B_{0,z} = 0$).
- Transversal elektrische Wellen (auch TE-Wellen, Wellen vom magnetischen Typ oder H-Wellen genannt), für die überall $E_z = 0$ (und damit $E_{0,z} = 0$).

Wir wollen jetzt einen Hohlwellenleiter mit rechteckigem Querschnitt betrachten, dessen Seiten die Längen a (in x-Richtung) und b (in y-Richtung) haben.

(d) Wie vereinfachen sich die Gleichungen (4) und (5) für diese beiden Fälle? Zeigen Sie insbesondere, daß die transversalen Komponenten des jeweiligen Feldes durch die longitudinale (d. h. z-) Komponente bestimmt sind. Machen Sie einen Separationsansatz, um in beiden Fällen aus (2) bzw. (3) die z-Komponente des elektrischen bzw. magnetischen Feldes zu berechnen.

(e) Welchen Typs ist die Welle mit der kleinsten möglichen Frequenz, die man als kritische Frequenz ω_c bezeichnet? Wie groß ist ω_c?

S 49 Lorentz-Transformationen (12 Punkte)

Wir betrachten den $\mathbb{R}^4$ mit den Koordinaten $x^0 = ct, x^1 = x$, $x^2 = y, x^3 = z$, zusammengefaßt im kontravarianten 4-Vektor x^μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$), und einem Skalarprodukt $a \cdot b = a_\mu b^\mu = g_{\mu\nu} a^\mu b^\nu$, worin $(g_{\mu\nu}) = \operatorname{diag}(1, -1, -1, -1)$. Diesen Raum bezeichnet man als Minkowski-Raum.

Als homogene Lorentz-Gruppe bezeichnet man die linearen Transformationen $a^\mu \to a'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu a^\nu$, die das Skalarprodukt invariant lassen, d. h.

$$(\Lambda a) \cdot (\Lambda b) = (\Lambda_\mu{}^\lambda a_\lambda)(\Lambda^\mu{}_\nu b^\nu) = a \cdot b\,. \tag{6}$$

(a) Wir untersuchen zunächst Lorentz-Transformationen, bei denen der zeitartige Basisvektor $\mathbf{e}_0 = (1, 0, 0, 0)$ auf sich selbst abgebildet wird, $\Lambda \mathbf{e}_0 = \mathbf{e}_0$. Argumentieren Sie, daß sich jede solche Transformation schreiben läßt als

$$\Lambda^\mu{}_\nu = (\mathcal{R}\mathcal{P}^k)^\mu{}_\nu\,, \tag{7}$$

wobei $k \in \{1, 2\}$,

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & R & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \tag{8}$$

mit $R \in \mathrm{SO}(3)$, und $\mathcal{P}$ die Matrix der Raumspiegelung ist.

(b) Geben Sie $\mathcal{P}$ und $\mathcal{P}^2$ in Matrixdarstellung an und zeigen Sie, daß für die Matrix $\mathcal{T}$ der Zeitspiegelung gilt $\mathcal{T} = -\mathcal{P}$.

Im folgenden wollen wir Lorentz-Boosts in x-Richtung betrachten, die gegeben sind durch

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v/c & 0 & 0 \\ -\gamma v/c & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}. \tag{9}$$

(c) Geben Sie t' und x' explizit an. Zeigen Sie, daß $\det \Lambda = 1$ und bestimmen Sie $(\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu$.

(d) Zeigen Sie, daß man obige Transformation erhält als

$$\Lambda^\mu{}_\nu = [\exp(\eta K_x)]^\mu{}_\nu \tag{10}$$

worin $\eta = \operatorname{Artanh}\left(\frac{v}{c}\right)$ als Rapidität bezeichnet wird und

$$(K_x)^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{11}$$

die sog. Erzeugende der Boosts in x-Richtung ist. Wie lassen sich $\cosh\eta$ und $\sinh\eta$ mit γ und v/c in Verbindung bringen? Wie sehen die Erzeugenden für Boosts in y- und z-Richtung aus?

Hinweis: Die Exponentialfunktion einer Matrix ist durch die Reihendarstellung definiert.

(e) Zeigen Sie, daß für zwei aufeinanderfolgende Boosts in x-Richtung die Rapidität additiv ist. Leiten Sie daraus die relativistische Additionsformel für Geschwindigkeiten her.

(f) Zeigen Sie, daß die Transformation für einen Lorentz-Boost im nichtrelativistischen Grenzfall $v \ll c$ in eine Galilei-Transformation übergeht.

Man kann zeigen, daß sich jede homogene Lorentz-Transformation schreiben läßt als

$$\Lambda = \operatorname{sign}(\Lambda^0{}_0)\, \Lambda_B(\vec{\eta})\, \mathcal{R}(\vec{\varphi})\, \mathcal{P}^k, \tag{12}$$

worin wieder $k \in \{1, 2\}$, $\mathcal{R}(\vec{\varphi})$ eine Drehung mit Drehvektor $\vec{\varphi}$ ist (siehe (8)), und $\Lambda_B(\vec{\eta})$ ein Boost in Richtung $\vec{\eta}$ mit Rapidität $|\vec{\eta}|$ ist.

(g) Drücken Sie diese Formel in Worten aus. Wieviele Erzeugende hat demzufolge die homogene Lorentz-Gruppe?

P 50 Lorentz-Transformation und Kausalität (5 Punkte)

Wir betrachten in einem Inertialsystem I zwei Ereignisse $E_0 = (ct_0, \mathbf{x}_0)$ und $E = (ct, \mathbf{x})$. Der invariante Abstand s zwischen diesen Ereignissen ist definiert durch $s^2 = c^2(t-t_0)^2 - (\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)^2$. Im folgenden sei $E_0 = (0, \mathbf{0})$. Außerdem wollen wir uns auf eine Raumdimension beschränken.

(a) Skizzieren Sie in einem Raum-Zeit-Diagramm die Bereiche

$$s^2 \begin{cases} > 0 & \text{(zeitartiger Bereich)} \\ = 0 & \text{(lichtartiger Bereich)} \\ < 0 & \text{(raumartiger Bereich)}\,. \end{cases} \tag{13}$$

Bestimmen Sie den sog. kausalen Bereich, d. h. die Menge der Ereignispunkte, die wir durch unser Zutun beeinflussen können.

(b) Überprüfen Sie am Beispiel eines Boosts, daß s^2 eine Invariante unter Lorentztransformationen ist.

Wir nehmen nun an, daß die Ereignisse E_0 und E in I gleichzeitig sind, d. h. $E_0 = (0, 0)$ und $E = (0, a)$. Zeigen Sie:

(c) Der invariante Abstand der beiden Ereignisse ist in allen Inertialsystemen raumartig. Der räumliche Abstand in einem anderen Inertialsystem I' variiert zwischen a und ∞.

(d) Der zeitliche Abstand in I' kann beliebige Werte annehmen. Wie muß man die Geschwindigkeit v wählen, damit man in I' einen vorgegebenen zeitlichen Abstand $\delta t'$ mißt? Insbesondere hängt also die zeitliche Reihenfolge der Ereignisse vom gewählten Inertialsystem ab. Was bedeutet das für die 'klassische' Definition der Kausalität?

S 51 Zeitdilatation und Myonzerfall (3 Punkte)

Der energiereiche Teil der sekundären kosmischen Strahlung besteht hauptsächlich aus schnellen Myonen mit einer Geschwindigkeit von etwa $v_L = 0.98\,c$. Ohne Zeitdilatation wäre ihre Chance, bis zur Erdoberfläche zu gelangen, nur sehr gering, denn ruhende Myonen haben eine mittlere Lebensdauer von nur $\tau_0 = 2.2 \cdot 10^{-6}\,\text{sec}$.
Betrachten Sie als einfaches Modell vom erdfesten Labor aus einen Strom von Myonen, der aus einer Höhe von $h = 3\,\text{km}$ mit konstanter Geschwindigkeit senkrecht auf die Erdoberfläche niedergeht, und berechnen Sie das Verhältnis I_0/I_h der Intensität des Stromes an der Erdoberfläche bezogen auf die in der Höhe h unter der Annahme, daß unterwegs außer durch den spontanen Zerfall keine Myonen verloren gehen.

Weitere Informationen unter:
http://www.thphys.uni-heidelberg.de/∼ewerz/ed08.html