
3. ÜBUNG ZUR ELEKTRODYNAMIK

Besprechung der Präsenzaufgaben: 30.04.2008
Abgabe der schriftlichen Aufgaben: 02.05.2008

S/P 7 Laplace-Operator in sphärischen Polarkoordinaten (5+2 Punkte)

S(a) Zeigen Sie, daß der Laplace-Operator in sphärischen Polarkoordinaten (r, φ, θ) mit $\mathbf{x} = (r \cos \varphi \sin \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \theta)$ gegeben ist durch

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \Delta_{\Omega} \quad (1)$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \Delta_{\Omega}, \quad (2)$$

worin

$$\Delta_{\Omega} = \frac{1}{\sin^2 \theta} \left[\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \right]. \quad (3)$$

Hinweis: Eine (wenn auch nicht die eleganteste) Möglichkeit ist die Benutzung der Kettenregel

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial \theta}. \quad (4)$$

P(b) Berechnen Sie Δr^m für $m \in \mathbb{Z}$. Für welche m ist das Ergebnis Null?

P(c) Zeigen Sie

$$\Delta \frac{1}{r} = -4\pi \delta^{(3)}(\mathbf{x}). \quad (5)$$

S 8 Greensche Funktion der Helmholtz- und der Poisson-Gleichung

(4 Punkte)

(a) Wir betrachten die Helmholtz-Gleichung

$$(\Delta + k^2) \psi(\mathbf{x}) = -4\pi \rho(\mathbf{x}), \quad (6)$$

worin $k \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, daß mit $r = |\mathbf{x}|$

$$G_{\pm}(\mathbf{x}) = \frac{e^{\pm ikr}}{r} \quad (7)$$

Greensche Funktionen der Helmholtz-Gleichung sind, d. h.

$$(\Delta + k^2) G_{\pm}(\mathbf{x}) = -4\pi \delta^{(3)}(\mathbf{x}). \quad (8)$$

(b) Zeigen Sie, daß

$$G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \quad (9)$$

Greensche Funktion der Poisson-Gleichung $\Delta\phi = -4\pi\rho(\mathbf{x})$ ist, d. h.

$$\Delta G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = -4\pi\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \quad (10)$$

P 9 Kugelsymmetrische Ladungsverteilung (2 Punkte)

Eine kugelsymmetrische Ladungsverteilung $\rho(\mathbf{x}) = \rho(r)$ (wie immer $r = |\mathbf{x}|$) erzeugt ein radiales elektrisches Feld (warum?)

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = f(r) \frac{\mathbf{x}}{r}. \quad (11)$$

Zeigen Sie, daß der Betrag des Feldes durch

$$f(r) = \frac{4\pi}{r^2} \int_0^r \rho(\mathbf{x}') r'^2 dr' = \frac{Q(r)}{r^2} \quad (12)$$

gegeben ist. Welche Bedeutung hat $Q(r)$? Was ist die physikalische Aussage dieser Gleichung?

S 10 Klassischer Elektronradius (2 Punkte)

Berechnen Sie die Selbstenergie eines Elektrons unter der Annahme, daß die Ladung des Elektrons

- (i) gleichmäßig auf einer Kugeloberfläche vom Radius R_e verteilt ist;
- (ii) gleichmäßig auf einer Kugel vom Radius R_e verteilt ist.

Nehmen Sie weiter an, daß die Ruheenergie $m_e c^2$ des Elektrons allein aus der elektrostatischen Selbstenergie resultiert. Bestimmen Sie hieraus die für obige Fälle resultierenden Radien R_e . Als *klassischen Elektronradius* bezeichnet man üblicherweise $r_0 = e^2/(m_e c^2)$.

Bemerkung: Alle obigen Annahmen sind natürlich falsch.

Hinweis: In Gaußschen Einheitensystem ist $e = 4.802 \cdot 10^{-10} \sqrt{\text{dyn}} \text{ cm}$, $m_e = 9.109 \cdot 10^{-28} \text{ g}$, $c = 2.998 \cdot 10^{10} \text{ cm/s}$. Dabei ist $1 \text{ dyn} = 10^{-5} \text{ N}$.

S 11 Wasserstoffatom I (4 Punkte)

Die durch das Elektron bewirkte mittlere elektrische Ladungsverteilung eines Wasserstoffatoms im Grundzustand ist

$$\rho(\mathbf{x}) = -\frac{e}{\pi a^3} \exp\left(-\frac{2r}{a}\right), \quad (13)$$

wobei a der Bohrsche Radius und e die Elementarladung ist.

- (a) Geben Sie die Ladungsverteilung des gesamte Wasserstoffatoms an, wenn der Kern als punktförmig betrachtet wird.
- (b) Berechnen Sie das durch das Wasserstoffatom erzeugte elektrische Feld $\mathbf{E}(\mathbf{x})$.
- (c) Wie verhält sich das Feld $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ für große Werte von r und für $r \rightarrow 0$?

P 12 Wirkung der Lorentzkraft (1 Punkt)

Ein Teilchen der Masse m und der Ladung q wird aus der Ruhelage durch ein konstantes elektrisches Feld $\mathbf{E} = E_0 \mathbf{e}_1$ auf einer Strecke der Länge l beschleunigt. Nach dem Austritt aus dem elektrischen Feld wird es durch ein konstantes Magnetfeld $\mathbf{B} = -B_0 \mathbf{e}_3$ auf eine Kreisbahn gezwungen. Welchen Radius hat die Kreisbahn? Bestimmen Sie den Mittelpunkt des Kreises, wenn der Eintritt in das magnetische Feld im Ursprung des Koordinatensystems liegt.

S 13 Vektorpotential der Magnetostatik (optional, +4 Punkte)

In der Vorlesung hatten wir den Ansatz $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ gemacht, um das divergenzfreie Vektorfeld \mathbf{B} aus seinen Wirbeln

$$\text{rot } \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \tag{14}$$

zu bestimmen. Wir hatten für das Vektorpotential \mathbf{A} gefunden

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' . \tag{15}$$

Überprüfen Sie noch einmal, daß der obige Ansatz allgemein möglich war, indem Sie explizit für dieses \mathbf{A} zeigen, daß $\text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{B}$. Benutzen Sie dazu (14) und andere geeignete Maßnahmen.

Weitere Informationen unter:

<http://www.thphys.uni-heidelberg.de/~ewerz/ed08.html>