Institut für Theoretische Physik
C. Ewerz, T. K. Herbst

Universität Heidelberg
Sommersemester 2015

2. Übung zur Quantenmechanik

Besprechung der Präsenzaufgaben: **Fr., 24.4.2015**
Abgabe der schriftlichen Aufgaben: **Di., 28.4.2015**

P 4 Operatoren im Hilbertraum (+ 5 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass für zwei Operatoren $\mathbf{C}$ und $\mathbf{D}$ gilt $[\mathbf{C},\mathbf{D}]^\dagger = \left[\mathbf{D}^\dagger,\mathbf{C}^\dagger\right]$.

(b) Zeigen Sie, dass Eigenwerte und Erwartungswerte selbstadjungierter Operatoren reell sind.

(c) Sei $\mathbf{B}$ ein selbstadjungierter Operator, und seien $|\phi_1\rangle$ und $|\phi_2\rangle$ zwei Eigenzustände mit Eigenwerten b_1 und b_2. Es gelte $b_1 \neq b_2$. Zeigen Sie, dass $|\phi_1\rangle$ und $|\phi_2\rangle$ orthogonal sind.

(d) Zeigen Sie, dass der Hamiltonoperator mit dem Zeitentwicklungsoperator kommutiert, d. h.
$$[\mathbf{H}, \exp(-i\mathbf{H}t/\hbar)] = 0\,. \tag{1}$$

(e) Seien $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ zwei selbstadjungierte Operatoren. Unter welcher Bedingung ist der Operator $\mathbf{AB}$ selbstadjungiert? Zeigen Sie, dass $i\,[\mathbf{A},\mathbf{B}]$ selbstadjungiert ist.

S 5 Unschärferelation (8 Punkte)

Wir betrachten zwei selbstadjungierte Operatoren $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$. Unter dem mittleren Schwankungsquadrat $(\Delta\mathbf{A})^2$ des Operators $\mathbf{A}$ versteht man den Erwartungswert von $(\mathbf{A} - \langle\mathbf{A}\rangle)^2$. Es gilt (warum?)

$$(\Delta\mathbf{A})^2 = \left\langle(\mathbf{A} - \langle\mathbf{A}\rangle)^2\right\rangle = \left\langle\mathbf{A}^2\right\rangle - \langle\mathbf{A}\rangle^2\ . \tag{2}$$

Wir wollen im Folgenden die verallgemeinerte Unschärferelation herleiten:

$$(\Delta\mathbf{A})^2(\Delta\mathbf{B})^2 \geq \frac{1}{4}\left|\langle[\mathbf{A},\mathbf{B}]\rangle\right|^2\ . \tag{3}$$

Seien $|f\rangle$ und $|g\rangle$ zwei Zustände und $\lambda \in \mathbb{C}$. Betrachten Sie $\|\,|f\rangle + \lambda\,|g\rangle\,\|$ und beweisen Sie durch die Wahl $\lambda = -\,\langle g\,|f\rangle\,/\,\langle g\,|g\rangle$ die Schwarzsche Ungleichung

$$\langle f\,|f\rangle\,\langle g\,|g\rangle \geq |\langle f\,|g\rangle|^2\ . \tag{4}$$

Ersetzen Sie hierin $|f\rangle$ und $|g\rangle$ durch $(\mathbf{A} - \langle\mathbf{A}\rangle)\,|\psi\rangle$ bzw. $(\mathbf{B} - \langle\mathbf{B}\rangle)\,|\psi\rangle$ mit einem beliebigen Zustand $|\psi\rangle$. Die rechte Seite lässt sich dann mit Hilfe der allgemeinen Identität

$$\mathbf{CD} = \frac{1}{2}\,[\mathbf{C},\mathbf{D}] + \frac{1}{2}(\mathbf{CD} + \mathbf{DC}) \tag{5}$$

(Beweis?) weiter abschätzen, um (3) zu erhalten.

S 6 Eigenschaften der Spur (5 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass die Spur eines Operators von der Wahl der Basis unabhängig ist.

Hinweis: Benutzen Sie die Definition der Spur und schieben Sie an geeigneter Stelle eine geeignete Darstellung des Operators **1** ein.

(b) Zeigen Sie, dass für Spuren von Produkten von Operatoren auf dem Hilbertraum gilt:

$$\mathrm{tr}\,(\mathbf{AB}) = \mathrm{tr}\,(\mathbf{BA}) \quad \text{und} \quad \mathrm{tr}\,(\mathbf{ABC}) = \mathrm{tr}\,(\mathbf{CAB}) = \mathrm{tr}\,(\mathbf{BCA})\,. \tag{6}$$

S 7 Delta-Distribution (7 Punkte)

Wir betrachten Distributionen in einer Dimension.

(a) Berechnen Sie die zweite Ableitung von $x\theta(x)$.

(b) Zeigen Sie für $a \neq 0$

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\,\delta(x)\,. \tag{7}$$

(c) Zeigen Sie, dass die Delta-Funktion mittels

$$\lim_{\epsilon \to 0} f_\epsilon(x - x_0) = \delta(x - x_0) \tag{8}$$

dargestellt werden kann, wenn

$$f_\epsilon = \begin{cases} (2\epsilon)^{-1} & \text{für } |x| \leq \epsilon \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \,. \tag{9}$$

Zeigen Sie, dass sie auch eine Darstellung mittels der Gaußkurve besitzt, d. h.

$$\lim_{\sigma \to 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x - x_0)^2}{2\sigma^2}\right] = \delta(x - x_0)\,. \tag{10}$$

Weitere Informationen unter:
http://www.thphys.uni-heidelberg.de/∼ewerz/qm15.html