Institut für Theoretische Physik
C. Ewerz, T. K. Herbst

Universität Heidelberg
Sommersemester 2015

7. Übung zur Quantenmechanik

Besprechung der Präsenzaufgaben: **Fr., 29.5.2015**
Abgabe der schriftlichen Aufgaben: **Di., 2.6.2015**

P 24 Parität (+4 Punkte)

Der Paritätsoperator $\boldsymbol{\mathcal{P}}$ ist definiert als ein Operator, der in der Ortsdarstellung auf einen Zustand $|\psi\rangle$ im Hilbertraum $\mathcal{H}$ wirkt gemäß

$$\boldsymbol{\mathcal{P}}\psi(\vec{x}) = \psi(-\vec{x})\,. \tag{1}$$

(a) Zeigen Sie folgende Eigenschaften des Paritätsoperators: $\boldsymbol{\mathcal{P}}^2 = \mathbf{1}\,, \quad \boldsymbol{\mathcal{P}}^\dagger = \boldsymbol{\mathcal{P}}\,,$
und dass der Paritätsoperator unitär ist und die Eigenwerte ± 1 hat.

(b) Zeigen Sie weiter, dass der Paritätsoperator mit dem Ortsoperator $\vec{\mathbf{Q}}$ und dem Impulsoperator $\vec{\mathbf{P}}$ antivertauscht, d. h. $\boldsymbol{\mathcal{P}}\vec{\mathbf{Q}} = -\vec{\mathbf{Q}}\boldsymbol{\mathcal{P}}\,, \quad \boldsymbol{\mathcal{P}}\vec{\mathbf{P}} = -\vec{\mathbf{P}}\boldsymbol{\mathcal{P}}\,.$

Eigenzustände zum Paritätsoperator mit Eigenwert $+1$ (-1) bezeichnet man als Zustände positiver (negativer) Parität.
Wir wollen jetzt den eindimensionalen harmonischen Oszillators mit Hamiltonoperator $\mathbf{H} = \frac{1}{2m}\mathbf{P}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2\mathbf{Q}^2$ betrachten.

(c) Zeigen Sie, dass $[\boldsymbol{\mathcal{P}}, \mathbf{H}] = 0$.

(d) Welche Parität haben die Eigenzustände des eindimensionalen harmonischen Oszillators? Stellen Sie einen Zusammenhang zwischen der Parität und der (Anti-)Symmetrie der Wellenfunktion her.
Hinweis: Betrachten Sie zunächst den Grundzustand. Für die angeregten Zustände ist es hilfreich zu zeigen, dass $\boldsymbol{\mathcal{P}}\mathbf{A}^\dagger + \mathbf{A}^\dagger\boldsymbol{\mathcal{P}} = 0$.

S 25 Gaußsches Wellenpaket III (8 Punkte)

Wir untersuchen weiter das eindimensionale Gaußsche Wellenpaket aus Aufg. 21, d. h. ein Wellenpaket, das zum Zeitpunkt $t = 0$ die Form

$$\psi(x, t = 0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{\sqrt{2\pi}}\, e^{ikx}\, \phi(k) \tag{2}$$

mit $\phi(k) = \left(\frac{2a^2}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-a^2(k-k_0)^2}$ und $a, k_0 \in \mathbb{R}$ hat. In Aufg. 21 wurde dafür die folgende Wahrscheinlichkeitsdichte $\rho(x,t)$ zur Zeit t berechnet:

$$\rho(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tilde{a}^2}} \exp\left[-\frac{1}{2\tilde{a}^2}\left(x - \frac{\hbar k_0}{m}t\right)^2\right] \tag{3}$$

mit $\tilde{a}^2 = a^2(1 + t^2/\tau^2)$ und $\tau = 2ma^2/\hbar$.
Berechnen Sie die zeitliche Entwicklung der Erwartungswerte des Orts- und des Impulsoperators. (Das Resultat aus Aufg. 21(b) kann hierzu verwendet werden.) Vergleichen Sie das Resultat mit den Ehrenfestschen Gleichungen. Bestimmen Sie auch die zeitliche Entwicklung des Schwankungsprodukts $(\Delta\mathbf{Q})(\Delta\mathbf{P})$. Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem minimal möglichen Wert, der sich aus der Unschärferelation ergibt.

S 26 Eindimensionale Potentialbarriere (12 Punkte)

Wir betrachten eine eindimensionale Potentialbarriere der Höhe $V_0 \in \mathbb{R}_+$ und der Tiefe $a \in \mathbb{R}_+$. Der Hamiltonoperator für ein Teilchen der Masse m ist im Ortsraum gegeben durch

$$\mathbf{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x) \tag{4}$$

mit dem Potential

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ V_0 & \text{für } 0 \leq x \leq a\,. \\ 0 & \text{für } a < x \end{cases} \tag{5}$$

Wir wollen verallgemeinerte Eigenzustände $\psi(x)$ von $\mathbf{H}$ zur Energie E finden. Dabei soll zunächst $0 < E < V_0$ gelten. Wir machen den allgemeinen Ansatz (vgl. Vorlesung)

$$\psi(x) = \begin{cases} Ae^{ikx} + Be^{-ikx} & \text{für } x < 0 \\ Ce^{ik'x} + De^{-ik'x} & \text{für } 0 \leq x \leq a \\ Fe^{ikx} + Ge^{-ikx} & \text{für } a < x \end{cases} \tag{6}$$

mit $A, B, C, D, F, G \in \mathbb{C}$. Bestimmen Sie k und k' so, dass dieses $\psi(x)$ ein verallgemeinerter Eigenzustand zur Energie E ist.
Wir wollen eine „von links einlaufende ebene Welle“ untersuchen. Dazu wählen wir $A = 1$ und $G = 0$. Finden Sie die notwendigen (Anschluss-)Bedingungen für die anderen Koeffizienten $B, \ldots, F$ in Form eines linearen Gleichungssystems. In diesem Gleichungssystem können die Koeffizienten C und D eliminiert werden. Zeigen Sie:

$$B = \frac{(k^2 - k'^2)(1 - e^{2ik'a})}{(k+k')^2 - (k-k')^2 e^{2ik'a}}\,, \tag{7}$$

$$F = \frac{4kk' e^{i(k'-k)a}}{(k+k')^2 - (k-k')^2 e^{2ik'a}}\,. \tag{8}$$

Bestimmen Sie hieraus den Reflexionskoeffizienten $R = |B|^2$ und den Transmissionskoeffizienten $T = |F|^2$, d. h. die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass ein Teilchen am Potential reflektiert wird bzw. durch das Potential tunnelt. Zeigen Sie, dass $R + T = 1$.
Die obigen Resultate gelten auch, wenn $E \geq V_0$ gilt. Wie sieht k' in den Fällen $E \leq V_0$ und $E \geq V_0$ aus? Wie wirkt sich das auf die funktionale Abhängigkeit der Reflexions- und Transmissionskoeffizienten aus?
Skizzieren Sie den Transmissionskoeffizienten als Funktion von E/V_0 im Bereich $0 \leq E/V_0 \leq 4$, zum Beispiel für $mV_0a^2/\hbar^2 = 8$. Wie groß ist der Transmissionskoeffizient im Fall $E \to V_0$? Bei welchen Energiewerten ist die Barriere vollständig durchlässig?

S 27 Angeregte Zustände des 1-dim. harmonischen Oszillators

(optional, + 4 Punkte)

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass der Grundzustand $|\psi_0\rangle$ des eindimensionalen harmonischen Oszillators (bis auf Phasenfaktoren) eindeutig bestimmt ist. Zeigen Sie durch Induktion, dass auch die angeregten Zustände $|\psi_n\rangle$ bis auf Phasenfaktoren eindeutig sind.

Hinweis:
Verwenden Sie die Operatoren $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}^\dagger$ und $\mathbf{N}$ aus Aufg. 19. Starten Sie beim Induktionsschritt mit einer Menge von Eigenzuständen $|\psi^i_{n+1}\rangle$ des Operators $\mathbf{N}$ zum Eigenwert $n+1$. Durch sukzessive Anwendung der Operatoren $\mathbf{A}$ und $\mathbf{A}^\dagger$ können Sie dann finden, dass die Zustände $|\psi^i_{n+1}\rangle$ mit verschiedenen i zueinander proportional sein müssen, woraus sich die Eindeutigkeit des angeregten Zustands $|\psi_{n+1}\rangle$ ableiten lässt.