Institut für Theoretische Physik
C. Ewerz, T. K. Herbst

Universität Heidelberg
Sommersemester 2015

11. Übung zur Quantenmechanik

Besprechung der Präsenzaufgaben: **Fr., 26.6.2015**
Abgabe der schriftlichen Aufgaben: **Di., 30.6.2015**

P 42 Parität und Drehimpuls (+ 5 Punkte)

Wir wollen den Zusammenhang zwischen Parität und Drehimpuls untersuchen. Die Wirkung des Paritätsoperators $\boldsymbol{\mathcal{P}}$ auf einen Zustand $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ ist in Ortsdarstellung $\boldsymbol{\mathcal{P}}\psi(\vec{x}) = \psi(-\vec{x})$, vgl. Aufg. 24.

Betrachten Sie die dreidimensionale Bewegung eines Teilchens der Masse m in einem rotationssymmetrischen Potential, $\mathbf{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(r)$. Zeigen Sie, dass $[\boldsymbol{\mathcal{P}}, \mathbf{H}] = 0$ und $[\boldsymbol{\mathcal{P}}, \vec{\mathbf{L}}] = 0$, und schließen Sie, dass es simultane Eigenfunktionen von $\mathbf{H}, \vec{\mathbf{L}}^2, \mathbf{L}_3$ und $\boldsymbol{\mathcal{P}}$ gibt. Zeigen Sie außerdem für $\psi(\vec{x}) = f(r)Y_{lm}(\theta, \varphi)$

$$\boldsymbol{\mathcal{P}}\psi(\vec{x}) = (-1)^l \psi(\vec{x})\,. \tag{1}$$

Hinweis: Es gilt $\quad Y_{ll}(\theta, \varphi) = \frac{(-1)^l}{2^l l!}\sqrt{\frac{(2l+1)!}{4\pi}}\,\sin^l\theta\, e^{il\varphi}\,.$

S 43 Lie-Algebra der Drehgruppe und Vektoroperatoren (6 + 3 Punkte)

(a) Bestimmen Sie für einen gegebenen Vektor $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ eine Matrix $I_{\vec{a}}$ so, dass für jeden Vektor $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$ gilt

$$I_{\vec{a}}\,\vec{b} = \vec{a} \times \vec{b}\,. \tag{2}$$

Geben Sie für die Basisvektoren $\vec{e}_i$ der Standardbasis in $\mathbb{R}^3$ die Matrixelemente $(I_{\vec{e}_i})_{jk}$ an. Zeigen Sie, dass gilt

$$[I_{\vec{e}_i}, I_{\vec{e}_j}] = \epsilon_{ijk}\, I_{\vec{e}_k}\,. \tag{3}$$

Die Matrizen $I_{\vec{a}}$ bilden die Lie-Algebra $\mathfrak{so}(3)$ der Drehgruppe, $\mathfrak{so}(3) = \{\theta \in GL(3)\,|\,\theta^T = -\theta\}$. Man nennt die ϵ_{ijk} in der Vertauschungsrelation (3) die Strukturkonstanten von $SO(3)$. Die Elemente der Drehgruppe $SO(3)$ erhält man aus den Elementen der Lie-Algebra durch die Exponentialfunktion

$$R_{\vec{\omega}} = \exp I_{\vec{\omega}}\,, \tag{4}$$

wobei $|\vec{\omega}|$ der Drehwinkel und $\frac{\vec{\omega}}{|\vec{\omega}|}$ die Drehachse sind.

(b) Zeigen Sie (4) am Beispiel einer Drehung um die 1-Achse.

Wir verwenden im Folgenden wieder die unitäre Darstellung $D(R)$ der Drehung R auf dem Hilbertraum $\mathcal{H}$ aus Aufg. 37.

Man bezeichnet einen Operator $\mathbf{S}$ als **skalaren Operator**, wenn er sich unter Drehungen transformiert als

$$D^{-1}(R_{\vec{\omega}})\,\mathbf{S}\,D(R_{\vec{\omega}}) = \mathbf{S}\,. \tag{5}$$

Man nennt einen Operator $\vec{\mathbf{V}}$ einen **Vektoroperator**, wenn er sich unter Drehungen transformiert als

$$D^{-1}(R_{\vec{\omega}})\,\vec{\mathbf{V}}\,D(R_{\vec{\omega}}) = R_{\vec{\omega}}\vec{\mathbf{V}}\,. \tag{6}$$

(c) Zeigen Sie, dass für jeden Vektoroperator $\vec{\mathbf{V}}$ die folgende Vertauschungsrelation mit dem Bahndrehimpuls $\vec{\mathbf{L}}$ gilt

$$[\mathbf{L}_i, \mathbf{V}_j] = i\hbar \sum_k \epsilon_{ijk} \mathbf{V}_k \,. \tag{7}$$

Man kann zeigen, dass diese Bedingung äquivalent zu (6) ist und daher einen Vektoroperator charakterisiert.

Hinweis: Benutzen Sie eine bekannte Darstellung von $D(R_{\vec{\omega}})$ und entwickeln Sie (6) für kleine $|\vec{\omega}|$ bis zur ersten Ordnung.

(d) Zeigen Sie, dass Orts- und Impulsoperator Vektoroperatoren sind.

(e) (optional, + 3 Punkte)

Zeigen Sie: Falls $\vec{\mathbf{A}}$ und $\vec{\mathbf{B}}$ Vektoroperatoren sind, so ist auch $\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}$ ein Vektoroperator.

S 44 Algebraische Herleitung des Wasserstoff-Spektrums (optional, + 20 Punkte)

Das Coulomb-Potential (und damit das Wasserstoff-Problem) besitzt eine verborgene Symmetrie, die es erlaubt, das Spektrum rein algebraisch herzuleiten. Diese Herleitung wollen wir hier durchführen. Konsequenz der verborgenen Symmetrie, die nur beim Coulomb-Potential auftritt, ist die Existenz einer zusätzlichen Erhaltungsgröße, des Lenzschen Vektors

$$\vec{\mathbf{F}} = \tfrac{1}{2m}\left(\vec{\mathbf{P}} \times \vec{\mathbf{L}} - \vec{\mathbf{L}} \times \vec{\mathbf{P}}\right) - \tfrac{Ze_0^2}{|\vec{\mathbf{Q}}|}\,\vec{\mathbf{Q}} \,. \tag{8}$$

Es ist also $[\vec{\mathbf{F}}, \mathbf{H}] = 0$ für $\mathbf{H} = \frac{\vec{\mathbf{P}}^2}{2m} - \frac{Ze_0^2}{|\vec{\mathbf{Q}}|}$, vgl. Aufg. 38.

(a) Zeigen Sie, dass $\vec{\mathbf{F}}$ hermitesch ist.

(b) Schreiben Sie (mit Hilfe der Vertauschungsrelation von $\mathbf{L}_i$ und $\mathbf{P}_j$) $\vec{\mathbf{F}}$ als

$$\vec{\mathbf{F}} = \tfrac{1}{m}\,\vec{\mathbf{P}} \times \vec{\mathbf{L}} - \tfrac{i\hbar}{m}\,\vec{\mathbf{P}} - \tfrac{Ze_0^2}{|\vec{\mathbf{Q}}|}\,\vec{\mathbf{Q}} \,. \tag{9}$$

Verwenden Sie dies um zu zeigen, dass

$$\vec{\mathbf{L}} \cdot \vec{\mathbf{F}} = \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{L}} = 0 \,. \tag{10}$$

(c) Zeigen Sie folgende Relationen:

$$\begin{aligned}
\vec{\mathbf{Q}} \cdot (\vec{\mathbf{P}} \times \vec{\mathbf{L}}) &= \vec{\mathbf{L}}^2 \,, && (11)\\
(\vec{\mathbf{P}} \times \vec{\mathbf{L}}) \cdot \vec{\mathbf{Q}} &= \vec{\mathbf{L}}^2 + 2i\hbar\,\vec{\mathbf{P}} \cdot \vec{\mathbf{Q}} \,, && (12)\\
(\vec{\mathbf{P}} \times \vec{\mathbf{L}})^2 &= \vec{\mathbf{P}}^2\,\vec{\mathbf{L}}^2 \,, && (13)\\
\vec{\mathbf{P}} \cdot (\vec{\mathbf{P}} \times \vec{\mathbf{L}}) &= 0 \,, && (14)\\
(\vec{\mathbf{P}} \times \vec{\mathbf{L}}) \cdot \vec{\mathbf{P}} &= 2i\hbar\,\vec{\mathbf{P}}^2 \,. && (15)
\end{aligned}$$

Nutzen Sie diese, um $\vec{\mathbf{F}}^2$ darzustellen als

$$\vec{\mathbf{F}}^2 = \tfrac{2}{m}\,\mathbf{H}\,(\mathbf{L}^2 + \hbar^2) + Z^2 e_0^4 \,. \tag{16}$$

Laut dieser Darstellung lassen sich die Energieeigenwerte (d.h. die Eigenwerte von $\mathbf{H}$) aus den Eigenwerten von $\vec{\mathbf{F}}^2$ berechnen.

(d) Wir wollen als nächstes zeigen, dass die Operatoren $\vec{\mathbf{L}}$ und $\vec{\mathbf{F}}$ eine geschlossene Algebra bilden, die $\mathbf{H}$ involviert. Leiten Sie dazu her (was der mühsamste Teil unserer Herleitung ist)

$$[\mathbf{F}_i, \mathbf{F}_j] = -\tfrac{2i}{m}\,\hbar \sum_k \epsilon_{ijk}\,\mathbf{H}\,\mathbf{L}_k\,. \tag{17}$$

Zeigen Sie weiter (hierbei kann Aufg. 43 helfen)

$$[\mathbf{L}_i, \mathbf{F}_j] = i\hbar \sum_k \epsilon_{ijk}\,\mathbf{F}_k\,. \tag{18}$$

Wir führen jetzt die Operatoren $\vec{\mathbf{B}}_\pm$ ein als

$$\vec{\mathbf{B}}_\pm = \tfrac{1}{2}\left(\vec{\mathbf{L}} \pm \sqrt{\tfrac{m}{-2\mathbf{H}}}\,\vec{\mathbf{F}}\right)\,. \tag{19}$$

Wir interessieren uns hier nur für die gebundenen Zustände von $\mathbf{H}$. Wenn wir uns auf diese beschränken, sind $\vec{\mathbf{B}}_\pm$ hermitesch. (Warum?)

(e) Benutzen Sie (17) und (18) um die folgenden Vertauschungsrelationen herzuleiten:

$$[\mathbf{B}_{+i}, \mathbf{B}_{+j}] = i\hbar \sum_k \epsilon_{ijk}\,\mathbf{B}_{+k}\,, \tag{20}$$

$$[\mathbf{B}_{-i}, \mathbf{B}_{-j}] = i\hbar \sum_k \epsilon_{ijk}\,\mathbf{B}_{-k}\,, \tag{21}$$

$$[\mathbf{B}_{+i}, \mathbf{B}_{-j}] = 0\,. \tag{22}$$

Die Vertauschungsrelationen (20)-(22) entsprechen Algebren zweier unabhängiger Drehgruppen, $SO(3)\times SO(3)$. Diese Symmetrie ist (lokal) isomorph zu $O(4)$. Die verborgene Symmetrie des Coulomb-Potentials ist also eine $O(4)$-Symmetrie.

(f) Argumentieren Sie, dass die möglichen Eigenwerte der Operatoren $\vec{\mathbf{B}}_\pm^2$ nur die Werte $\hbar^2\, b_\pm\,(b_\pm + 1)$ mit $b_\pm \in \mathbb{Z}/2$ annehmen können. Benutzen Sie (10) um zu zeigen, dass

$$\vec{\mathbf{B}}_\pm^2 = \tfrac{1}{4}\left[\vec{\mathbf{L}}^2 + \left(\tfrac{m}{-2\mathbf{H}}\right)\vec{\mathbf{F}}^2\right]\,. \tag{23}$$

Folgern Sie, dass daher $b_+ = b_- =: b$.

Wenden Sie nun (23) auf gemeinsame Eigenzustände von $\vec{\mathbf{B}}_\pm^2$ und $\mathbf{H}$ (mit Eigenwert E) an. Benutzen Sie (16), um daraus die möglichen Werte für E zu bestimmen. Bringen Sie schließlich das Ergebnis auf die bekannte Form mit der Hauptquantenzahl n.

S 45 Eichinvarianz (5 Punkte)

Der Hamiltonoperator für ein Teilchen der Masse m und der Ladung e im elektromagnetischen Feld ist

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2m}\left(\vec{\mathbf{p}} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2 + e\Phi\,, \tag{24}$$

worin $\vec{A}$ und Φ die Potentiale für die Felder $\vec{\mathbf{E}}$ und $\vec{\mathbf{B}}$ sind. Zeigen Sie, dass die zeitabhängige Schrödingergleichung ihre Form behält, wenn man eine Eichtransformation der Potentiale,

$$\vec{A} \to \vec{A}' = \vec{A} - \nabla\Lambda\,, \qquad \Phi \to \Phi' = \Phi + \frac{1}{c}\frac{\partial\Lambda}{\partial t} \tag{25}$$

mit einer beliebigen Funktion $\Lambda(\vec{x}, t)$, und gleichzeitig eine lokale Phasentransformation der Wellenfunktion durchführt

$$\psi(\vec{x}, t) \;\to\; \psi'(\vec{x}, t) = \exp\left[-\frac{ie}{\hbar c}\,\Lambda(\vec{x}, t)\right]\psi(\vec{x}, t)\,. \tag{26}$$

S 46 Aharonov-Bohm-Effekt (4 Punkte)

Elektronen aus einer Quelle bei $\vec{x}_0$ treffen auf eine Doppelspaltanordnung, hinter der ein Schirm aufgestellt ist. Zwischen den beiden Spalten sei eine (unendlich lange) Spule parallel zu den Spalten angebracht, die ein Magnetfeld erzeugt, das auf das Innere der Spule beschränkt ist. Die Spule sei derart abgeschirmt, dass die Elektronen nicht in das Magnetfeld eindringen können.
Der Hamiltonoperator für die Bewegung eines Elektrons im konstanten Magnetfeld $\vec{B}$ ist

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2m}\left(\vec{\mathbf{P}} + \frac{e_0}{c}\vec{A}\right)^2 , \tag{27}$$

wobei $-e_0$ die Elektronladung und $\vec{A}$ ein Vektorpotential für $\vec{B}$ ist, d. h. $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$. Zeigen Sie zunächst, dass das Vektorpotential ($A \in \mathbb{R}$)

$$\vec{A}(\vec{x}) = \left(-\frac{Ax_2}{x_1^2 + x_2^2}, \frac{Ax_1}{x_1^2 + x_2^2}, 0\right) \tag{28}$$

das Magnetfeld obiger Versuchsanordnung beschreibt. Zeigen Sie weiter, dass

$$\psi_B(\vec{x}) = \exp\left(-\frac{ie_0}{\hbar c}\int_{\vec{x}_0}^{\vec{x}} \vec{A}\cdot d\vec{s}\right)\psi_0(\vec{x}) \tag{29}$$

eine Lösung der Schrödingergleichung mit Magnetfeld ist, wenn $\psi_0(\vec{x})$ eine Lösung der Schrödingergleichung ohne Feld ist. Zeigen Sie mit Hilfe der Ergebnisse der Aufgabe 41, dass sich das Interferenzmuster auf dem Schirm ändert, wenn das Magnetfeld in der Spule ein- bzw. ausgeschaltet wird.

S 47 Endliche Kernausdehnung und atomare Energieniveaus (5 Punkte)

Der Atomkern eines wasserstoffartigen Atoms werde als homogen geladene Kugel der Gesamtladung Ze_0 mit Radius R aufgefasst. Das Elektron bewegt sich dann im Potential

$$V(r) = \begin{cases} -\frac{Ze_0^2}{R}\left[\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{r}{R}\right)^2\right] & \text{für } r \leq R \\ -\frac{Ze_0^2}{r} & \text{für } R < r\,. \end{cases} \tag{30}$$

Behandeln Sie die *Abweichung* des Potentials $V(r)$ vom Coulomb-Potential eines punktförmigen Kerns als Störung und berechnen Sie in Störungsrechnung 1. Ordnung die Energieverschiebung des 1s-Zustands in Abhängigkeit vom Bohrschen Radius a und vom Kernradius R. Dabei können Sie annehmen, dass $R \ll a$. Wie groß ist die Energieverschiebung des Grundzustands beim Wasserstoff ($Z = 1$, $R = 1.2 \cdot 10^{-15}\,\text{m}$)?

Hinweis: Die Wellenfunktion des 1s-Zustands im Coulomb-Potential ist (im Ortsraum)

$$\psi_{100}(r,\theta,\varphi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{Z}{a}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{Zr}{a}} \tag{31}$$

mit dem Bohrschen Radius $a = \hbar^2/(me_0^2) = 0.5 \cdot 10^{-10}\,\text{m}$. Beachten Sie, dass $e^{-r/a} \simeq 1$ für $r \leq R \ll a$.

Weitere Informationen unter:
http://www.thphys.uni-heidelberg.de/∼ewerz/qm15.html