

---

## 14. ÜBUNG ZUR QUANTENMECHANIK

---

Besprechung der Präsenzaufgabe: **Fr., 17.7.2015**

### P 58 Energie-Zeit-Unschärfe

(optional, + 5 Punkte)

Auch zwischen Energie und Zeit besteht in der Quantenmechanik eine Unschärferelation, die allerdings einen anderen Ursprung hat als die bisher betrachteten Unschärferelationen, z. B. zwischen Ort und Impuls.

Betrachten Sie ein Quantensystem, das durch einen zeitunabhängigen Hamiltonoperator  $\mathbf{H}$  beschrieben wird.

- (a) Sei  $\mathbf{A}$  eine nicht explizit von der Zeit abhängige Observable. Zeigen Sie, dass

$$(\Delta\mathbf{H})(\Delta\mathbf{A})(t) \geq \frac{\hbar}{2} \left| \frac{d\langle\mathbf{A}\rangle(t)}{dt} \right|. \quad (1)$$

Zeigen Sie weiter, dass  $\Delta\mathbf{H}$  nicht zeitabhängig ist. Geben Sie  $\Delta\mathbf{H}$  für einen Eigenzustand von  $\mathbf{H}$  an.

Leiten Sie durch Verwendung der Notation  $\Delta E = \Delta\mathbf{H}$  und durch die *Definition* einer typischen Zeitskala

$$\Delta t = \Delta\mathbf{A} \left| \frac{d\langle\mathbf{A}\rangle(t)}{dt} \right|^{-1} \quad (2)$$

eine Energie-Zeit-Unschärferelation ab.

- (b) Sei nun der Anfangszustand  $|\psi(t_0)\rangle$  eine Überlagerung zweier (nicht-entarteter) Eigenzustände von  $\mathbf{H}$  mit verschiedenen Eigenwerten  $E_1$  und  $E_2$ ,

$$|\psi(t_0)\rangle = c_1 |\phi_1\rangle + c_2 |\phi_2\rangle. \quad (3)$$

Geben Sie den Zustand zur Zeit  $t$  an. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, bei einer Messung einer mit  $\mathbf{H}$  nicht vertauschenden Observable  $\mathbf{A}$  den zum Eigenvektor  $|u_m\rangle$  von  $\mathbf{A}$  gehörenden Eigenwert  $a_m$  zu finden. Geben Sie die Bohr-Frequenz an, mit der diese Wahrscheinlichkeit oszilliert. Definieren Sie  $\Delta E = |E_2 - E_1|$  und erhalten Sie hiermit wieder eine Energie-Zeit-Unschärferelation.

*Bemerkungen:* Die Überlegungen aus Teil (b) lassen sich verallgemeinern auf den Fall eines kontinuierlichen Spektrums von  $\mathbf{H}$  und einen Anfangszustand, der eine Überlagerung der Form

$$|\psi(t_0)\rangle = \int dE g(E) |\phi_E\rangle \quad (4)$$

ist, wobei  $|g(E)|^2$  nur in einem Bereich der Breite  $\Delta E$  um ein  $E_0$  wesentlich von Null verschieden ist.

Beachten Sie, dass die Energie-Zeit-Unschärferelation sich deutlich von den anderen Unschärferelationen der Quantenmechanik unterscheidet. Bei letzteren basierte die Unschärfe auf dem Nicht-Kommutieren von Operatoren, die den Observablen zugeordnet sind. Die Zeit  $t$  ist in

der Quantenmechanik dagegen kein Operator sondern ein Parameter in der Schrödingergleichung.

Typischerweise erfordert die Herleitung der Energie-Zeit-Unschärferelation die *Definition* einer für das System typischen Zeitskala. Durch eine gewisse Freiheit bei dieser Definition erklärt sich, dass die Energie-Zeit-Unschärferelationen, die man in der Literatur findet, sich oft um Faktoren 2 und/oder  $\pi$  unterscheiden.

Weitere Informationen unter:

<http://www.thphys.uni-heidelberg.de/~ewerz/qm15.html>