

Allgemeine Relativitätstheorie

Sommersemester 2007

Blatt 10

Besprechung:

am 25.06. um 16:15 Uhr und am 27.06. um 11:15 im großen Hörsaal,
Philosophenweg 12

1. Verifiziere die in der Vorlesung angegebenen Ausdrücke für die R_{11} -, R_{22} - und R_{33} -Komponenten des Riccitors (alle Indizes sind Lorentzindizes):

$$R_{11} = -\frac{1}{2} (fh)^{-\frac{1}{2}} \frac{d}{dr} \left(f' (fh)^{-\frac{1}{2}} \right) + \frac{h'}{rh^2}$$
$$R_{22} = R_{33} = -\frac{1}{2} \frac{f'}{rfh} + \frac{1}{2} \frac{h'}{rh^2} + \frac{h-1}{hr^2}$$

2. Betrachte einen Beobachter, der sich an einem festen Punkt mit (Schwarzschild-)Koordinaten (r_0, θ_0, ϕ_0) bei einem schwarzen Loch mit Masse M befindet. Diesem Beobachter fällt seine Lampe in das schwarze Loch (mitten rein, also radial), die Strahlung mit einer festen Wellenlänge λ_s aussendet (in ihrem Ruhesystem).
- (a) Berechne die Eigengeschwindigkeit $\frac{dr}{d\tau}$ (τ ist die Eigenzeit des Senders) und die Koordinatengeschwindigkeit $\frac{dr}{dt}$ des fallenden Senders als Funktion von r . Wie groß sind die Geschwindigkeiten am Horizont ($r = 2GM$)? Wann erreicht der Sender den Horizont in Koordinatenzeit und in Eigenzeit?
- (b) Betrachte das Licht, das der Sender aussendet, wenn er sich an der Position r_s befindet. Berechne die Zeit t_e , zu der der entfernte Beobachter bei r_0 das Licht empfängt, und die von ihm gemessene Wellenlänge λ_e .
- (c) Zeige, daß die Rotverschiebung für große Zeiten exponentiell anwächst, daß also $\frac{\lambda_e}{\lambda_s} \propto \exp\left\{\frac{t_e}{T}\right\}$ und drücke die Konstante T durch die Masse des schwarzen Loches aus.