Allgemeine Relativitätstheorie

Sommersemester 2007

Blatt 12

Besprechung:

am 09.07. um 16:15 Uhr und am 11.07. um 11:15 im großen Hörsaal, Philosophenweg 12

1. Zeige, daß das Milne–Universum ein Teil des Minkowskiraums ist! Das Milne–Universum ist ein Friedmann–Robertson–Walker–Universum ohne Materie und ohne kosmologische Konstante, aber mit negativer Krümmung ($k = -1$), d.h. die Metrik ist von der Form

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}t^2 + a(t)^2 \left(\mathrm{d}\chi^2 + \sinh^2\chi \, \mathrm{d}\Omega^2\right)$$

   Bestimme zunächst den Skalenfaktor $a(t)$ aus der Friedmann–Gleichung mit $\rho = \Lambda = 0$. Finde dann eine Koordinatentransformation $(t, r) \to (T, R)$ (die Winkel müssen nicht transformiert werden), die die Metrik in die Minkowskiform

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}T^2 + \mathrm{d}R^2 + R^2\mathrm{d}\Omega^2$$

   bringt. (Hinweis: Lies aus dem Vergleich der beiden Metriken eine geeignete Form für $R(r, t)$ ab. Dann kannst du $T(r, t)$ raten oder allgemein das Linienelement ausrechnen und Koeffizienten vergleichen.)

   Welcher Teil des Minkowskiraumes wird erreicht?

   Warum ist es anschaulich klar, daß ein solches Universum Teil des Minkowskiraums ist?

2. Reissner–Nordström–Metrik

   Verallgemeinere die Schwarzschild–Lösung auf geladene schwarze Löcher, d.h. löse die Einstein–Gleichungen im statischen kugelsymmetrischen Fall, aber nicht im Vakuum, sondern mit einem elektromagnetischen Feld mit der üblichen Wirkung $S_{\mathrm{em}} = -\frac{1}{4}\int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$.

   Benutze dazu die allgemeine statische und kugelsymmetrische Metrik aus der Vorlesung. Nimm weiter an, daß $F_{\mu\nu}$ nur ein elektrisches Feld enthält, daß also nur $F_{tr} \neq 0$. Zeige, daß das Vektorpotential daher in die Form $A_0 = a(t, r)$, $A_i = 0$ geschrieben werden kann. Benutze diese Eichung und löse die Bewegungsgleichung für $F_{\mu\nu}$ und die Einsteingleichungen analog zum Schwarzschild–Fall.