

Allgemeine Relativitätstheorie

Sommersemester 2007

Blatt 13

Besprechung:

am 16.07. um 16:15 Uhr und am 18.07. um 11:15 im großen Hörsaal,
Philosophenweg 12

1. Um eine 'nackte' Singularität zu vermeiden, nimmt man bei Reissner-Nordström schwarzen Löchern an daß $Q^2 < M^2$ gilt. Dies provoziert die Idee, so lange geladene Teilchen hinein zu werfen, bis diese Ungleichung verletzt ist. Zeige daß die Ungleichung auch dann noch gilt, wenn man beliebig viele geladene Teilchen ins Loch hat stürzen lassen !

Anleitung: Nimm an, daß Ladung und Masse der hineingeworfenen Teilchen klein gegenüber Ladung und Masse des schwarzen Lochs sind. Die Bewegungsgleichung eines Teilchens mit Energie e und Ladung q , welches sich in radialer Richtung bewegt, lässt sich nach der gleichen Methode wie im Schwarzschild Fall (siehe Vorlesung) auf ein eindimensionales Problem abbilden. Das Ergebnis lautet hier:

$$\dot{r} = - \left(\left(e - \frac{qQ}{r} \right)^2 - \Delta m^2 \right)^{\frac{1}{2}} . \quad (1)$$

Es gilt $\Delta = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}$; M und Q bezeichnen Masse und elektrische Ladung des schwarzen Lochs, m die Ruhemasse des Teilchens.

Um diese Gleichung zu erhalten, zeige man zuerst aus der Bewegungsgleichung eines geladenen Teilchens ¹,

$$m x^\mu D_\mu \dot{x}^\rho = q F^\rho{}_\sigma \dot{x}^\sigma , \quad (2)$$

daß die aus den Killingvektoren folgenden Erhaltungsgrößen in

$$\pi^\mu \xi_\mu \quad (3)$$

abgewandelt werden. Hier bezeichnet $\pi^\mu = m \dot{x}^\mu + q A^\mu$ den kanonischen Impuls.

¹Diese Gleichung wird in einer der nächsten Übungen behandelt.