

Allgemeine Relativitätstheorie

Sommersemester 2007

Blatt 14

Besprechung:

am 23.07. um 16:15 Uhr und am 25.07. um 11:15 im großen Hörsaal,
Philosophenweg 12

1. Konforme Transformationen respektieren die kausale Struktur der Raumzeit. Dies bedeutet insbesondere, daß lichtartige Geodäten invariant sind. Zeige, daß der raum-, licht- oder zeitartige Charakter von Kurven erhalten bleibt. Zeige weiter, daß lichtartige Geodäten auf lichtartige Geodäten abgebildet werden, wohingegen zeit- oder raumartige Geodäten zu nicht-geodätischen Kurven werden.

Hinweis: die Geodätengleichung nimmt in einer allgemeinen Parametrisierung die Form

$$\frac{\partial^2 x^\rho}{\partial \tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\rho \frac{\partial x^\mu}{\partial \tau} \frac{\partial x^\nu}{\partial \tau} = \alpha(\tau) \frac{\partial x^\rho}{\partial \tau}$$

an, wobei $\alpha(\tau)$ eine beliebige Funktion von τ ist, die von der Parametrisierung abhängt.

2. Bestimme das konforme Diagramm für ein flaches vakuumdominiertes Robertson–Walker–Universum, d.h.

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) (dr^2 + r^2 d\Omega^2) ,$$

mit dem Skalenfaktor $a(t) = e^{Ht}$.

3. Zeige, daß der Hamiltonoperator des freien massiven skalaren Feldes sich in der Form

$$H = \frac{1}{2} \int d^3k \left(a_{\vec{k}} a_{\vec{k}}^\dagger + a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}} \right) \omega$$

schreiben lässt. Dabei sind $a_{\vec{k}}^\dagger$ und $a_{\vec{k}}$ Erzeuger und Vernichter und $\omega = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$.